

ды МИИТ. – Вып. 484. – М. : Транспорт, 1975. – С. 23–33.

5. **Исследование** работы маневровых тепловозов с гидропередачей / А. А. Лабут // Вестник ВНИИЖТ. – 1969. – № 2. – С. 16–19.

6. **Исследование** режимов работы и оценка эксплуатационной экономичности тепловозов серий ТГМ3 и ТГМ6 на металлургических предприятиях / В. Т. Степченков, Н. В. Сидячев, И. Н. Родионов // Труды ВНИТИ. – Вып. 41. – Коломна : ОНТИ, 1975. – С. 31–43.

7. **Работа** гидротрансформатора гидропередачи промышленного локомотива в переходных процессах и неуставившихся режимах работы / А. В. Осипов, В. А. Кручек, Д. Н. Курилкин // Известия ПГУПС. – Вып. 2. – 2012. – С. 37–46.

8. **Оценка** качества процесса переключения гидротрансформаторов гидропередачи промышленного локомотива / А. В. Осипов, В. А. Кручек, Д. Н. Курилкин // Известия ПГУПС. – Вып. 1. – 2013. – С. 128–139.

9. Пат. **SUN** № 350685, B61C9/18. Система автоматического управления многоциркуляционной гидравлической передачи транспортной машины / Воробьев Н. Ю., Кутырев Д. И. ; опубл. 13.09.72, Бюл. № 27.

10. **Устройство** тепловоза ТГМ6А // В. Н. Логунов, В. Г. Смагин. – М. : Транспорт, 1989. – 320 с.

11. **Рельсовые автобусы** РА-1, РА-2. Устройство основных узлов, устройство аппаратов, электрические и пневматические схемы / К. П. Агеев. – М. : Центр коммерческих разработок, 2007. – 160 с.

УДК 624.04

К. Ю. Полинкевич

Петербургский государственный университет путей сообщения

ИТЕРАЦИОННЫЙ СПОСОБ РАСЧЕТА СЛОИСТЫХ БАЛОК НА ПРОЧНОСТЬ

Предлагается описание методики расчета на прочность слоистых балок, основанной на итерационном способе последовательного удовлетворения условиям равновесия и совместности деформаций. На численном примере рассматриваются результаты и оценивается их близость к решению, полученному по методу конечных элементов.

теория упругости, слоистая балка, метод итераций, напряжения, деформации.

Введение

Ход работы по определению и уточнению напряженно-деформированного состояния многослойной балки можно представить в следующем виде:

- решение с использованием уравнений теории упругости для плоской задачи, при этом следует уточнить значения напряжений с учетом сдвиговых и поперечных деформаций;
- применение итерационного способа для решения [1];
- анализ сходимости результатов процесса вычислений.

Пусть балка длиной L имеет n слоев. Каждый i -й слой имеет толщину h_i , модуль упругости E_i , коэффициент Пуассона μ_i . К балке приложена известная нагрузка $q(z)$ и из дифференциальных зависимостей можно получить внутренние усилия $N(z)$ и $M(z)$.

1 Алгоритм решения задачи

Рассмотрим детально алгоритм решения поставленной задачи.

На первом этапе, на основании нижеперечисленных гипотез, поставленная задача

решается с использованием основных уравнений плоской задачи теории упругости [2]:

1. Статические уравнения эквивалентности, которые выражают равенство внутренних и внешних сил

$$\int_A \sigma dA = N;$$

$$\int_A (\sigma \cdot y) dA = M.$$

2. Геометрические уравнения, которые связывают деформации и перемещения (уравнения Коши):

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y};$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial W}{\partial z};$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}.$$

3. Физические уравнения, которые выражают зависимость между деформациями и напряжениями (закон Гука для плоской задачи):

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \mu\sigma_y);$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_z);$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G};$$

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}.$$

На этом этапе итераций решение построено на следующих гипотезах:

1. Гипотеза плоских сечений (гипотеза Я. Бернулли): поперечные сечения стержня, плоские и перпендикулярные его оси до деформации, остаются плоскими и перпендикулярными оси после деформации. Предполагается, что гипотеза справедлива независимо от количества слоев.

2. Гипотеза отсутствия сдвигов, согласно которой $\gamma = 0$ (иначе говоря, $G \rightarrow \infty$).

3. Гипотеза ненадавливания, согласно которой продольные волокна стержня не взаимодействуют в нормальном по отношению к ним направлении, $\sigma_y = 0$. Иначе говоря, принимается $\mu = 0$.

Основываясь на вышеперечисленных гипотезах, функцию $\varepsilon_z^{(1)}$ можно задать в виде:

$$\varepsilon_z^{(1)}(y, z) = \varepsilon_0(z) + \chi(z) \cdot y$$

(величины с верхним (в скобках) индексом соответствуют первому этапу вычислений, нижние индексы означают номер слоя).

Зная деформации, по закону Гука можно перейти к нормальным напряжениям, для каждого i -го слоя функция нормальных напряжений будет определяться по формуле:

$$\sigma_{z,i}^{(1)}(y, z) = E_i \cdot \varepsilon_z^{(1)}(y, z) = E_i(\varepsilon_0(z) + \chi(z) \cdot y).$$

Из условий статического равновесия находим значения коэффициентов $\varepsilon_0(z)$ и $\chi(z)$, определив заранее продольную силу и изгибающий момент:

$$\sum_0^i \int_A \sigma_{z,i}^{(1)}(y, z) dA = N(z);$$

$$\sum_0^i \int_A (\sigma_{z,i}^{(1)}(y, z) \cdot y) dA = M(z).$$

Теперь, зная функцию нормальных напряжений, из дифференциальных уравнений равновесия можем найти выражение для касательных напряжений:

$$\frac{\partial \sigma_{z,i}^{(1)}(y, z)}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yz,i}^{(1)}(y, z)}{\partial y} = 0;$$

$$\tau_{yz,i}^{(1)}(y, z) = - \int \frac{\partial \sigma_{z,i}^{(1)}(y, z)}{\partial z} \cdot dy + \tau_{0,i}(z).$$

Функция $\tau_{0,i}(z)$ находится из граничных условий. В данном случае граничным условием для крайних слоев будет горизонтальная составляющая внешних сил на свободной грани балки. Для промежуточных слоев

должно соблюдаться условие равенства касательных напряжений на их границе.

Аналогично из уравнений равновесия касательных и нормальных напряжений находим значение функции $\sigma_{y,i}^{(1)}$:

$$\frac{\partial \sigma_{y,i}^{(1)}(y, z)}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz,i}^{(1)}(y, z)}{\partial z} = 0;$$

$$\sigma_{y,i}^{(1)}(y, z) = - \int \frac{\partial \tau_{yz,i}^{(1)}(y, z)}{\partial z} \cdot dy + \sigma_{y0,i}(z).$$

Функция $\sigma_{y0,i}(z)$ находится из граничных условий. В данном случае граничным условием для крайних слоев будет вертикальная составляющая внешних сил на свободной грани балки. Для промежуточных слоев должно соблюдаться условие равенства нормальных напряжений на их границе. Аналогичная процедура уточнения первого этапа итераций приведена в [3].

В начале второго цикла по закону Гука находим функцию деформаций вдоль оси Y , $\varepsilon_{y,i}^{(2)}$:

$$\varepsilon_{y,i}^{(2)}(y, z) = \frac{1}{E_i} \cdot (\sigma_{y,i}^{(1)}(y, z) + \mu_i \cdot \sigma_{z,i}^{(1)}(y, z)).$$

Зная функцию деформации $\varepsilon_{y,i}^{(2)}(y, z)$, можно найти соответствующую функцию перемещения $V_i^{(2)}(y, z)$, пользуясь уравнением связи между деформациями и перемещениями:

$$V_i^{(2)}(y, z) = \int_h \varepsilon_{y,i}^{(2)}(y, z) \cdot dy + V_{0,i}(z).$$

Далее определяем функцию деформации сдвига по закону Гука:

$$\gamma_{yz,i}^{(2)} = \frac{\tau_{yz,i}^{(1)}}{G_i};$$

$$\text{где } G_i = \frac{E_i}{2(1 + \mu_i)}.$$

Затем из геометрических уравнений вновь находим функцию продольных деформаций $\varepsilon_{z,i}^{(2)}(y, z)$, но это уже не линейная функция, с которой начинался первый цикл вычислений:

$$\gamma_{yz,i}^{(2)} = \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z};$$

$$\frac{\partial \gamma_{yz,i}^{(2)}}{\partial z} = \frac{\partial W}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2};$$

$$\varepsilon_{z,i}^{(2)}(y, z) = \frac{\partial W}{\partial z} =$$

$$= \int \frac{\partial \gamma_{yz,i}^{(2)}}{\partial z} dy + \int \frac{\partial^2 V_i^{(2)}}{\partial z^2} dy + \varepsilon_{0,i}^{(2)}(z).$$

Зная деформации, по обобщенному закону Гука находим нормальные напряжения второго цикла $\sigma_{z,i}^{(2)}(y, z)$:

$$\sigma_{z,i}^{(2)}(y, z) = E_i \cdot \frac{\varepsilon_{z,i}^{(2)}(y, z) + \mu \varepsilon_{y,i}^{(2)}(y, z)}{(1 - \mu_i^2)}.$$

Функции $\varepsilon_{0,i}^{(2)}(z)$ и $V_{0,i}^{(2)}(z)$ находим из условия статического равновесия.

Функция $\sigma_{z,i}^{(2)}$ становится функцией более высокого порядка и имеет вид параболы пятой степени, что объясняется влиянием касательных и поперечных напряжений. Еще одна особенность функции $\sigma_{z,i}^{(2)}$ – в приведенном центре масс (по Y) она не принимает значение «0», что объясняется влиянием напряжений $\sigma_{y,i}$; в свою очередь, эпюра $\sigma_{y,i}$ зависит от места приложения нагрузки по высоте балки. Используя аналогичную процедуру, можно уточнить напряженное состояние балки на последующих этапах итерации.

Итерационный метод учитывает коэффициенты второго порядка малости и выше, в зависимости от количества циклов. Полученные выражения для напряжений обладают свойством сходимости, что позволяет получать довольно точные результаты уже в третьем цикле. Без использования электронного вычислительного комплекса было бы практически невозможно получение результатов даже в первом цикле, потому что расчет включает в себя многоэтапный вычислительный процесс. Для решения ряда уравнений и построения графиков использовалась программа *MathCAD*.

2 Пример расчета на прочность трехслойной балки

Сравним значения напряжений в первом и втором цикле расчета, а также влияние распределения свойств материалов по слоям на примере двух задач.

Рассмотрим трехслойную балку длиной $L = 30$ м (рис. 1, 2), высотой $h = 6$ м (высота слоев: $h_1 = 1$ м, $h_2 = 4$ м, $h_3 = 1$ м), шириной $b = 1$ м. Коэффициенты Пуассона послойно: $\mu_1 = 0,3$, $\mu_2 = 0,2$, $\mu_3 = 0,3$.

Балка нагружена распределенной по длине нагрузкой, которая изменяется по закону синуса: $q(z) = q_0 \sin\left(\frac{\pi \cdot Z}{L}\right)$, $q_0 = 1$ кН/м.

В задаче № 1 модули Юнга заданы послойно: $E_1 = 10^5$ МПа, $E_2 = 10^4$ МПа, $E_3 = 10^5$ МПа.

В задаче № 2 модули Юнга заданы послойно: $E_1 = 10^4$ МПа, $E_2 = 10^5$ МПа, $E_3 = 10^4$ МПа.

Поставленные задачи также решены методом конечных элементов в программном комплексе *Midas Civil*. Рассмотрена плоская задача, в которой используются четырехузловые конечные элементы, размер каждого

конечного элемента $0,25 \times 0,25$ м. Эпюры нормальных напряжений в четверти пролета для задач № 1 и 2 приведены на рис. 3.

Значения нормальных напряжений в сечении, расположенном в четверти пролета на первом и втором цикле, а также результаты, полученные по методу конечных элементов, для каждой задачи приведены в таблице.

Сравним максимальные значения нормальных напряжений, полученных в первом, втором циклах и по методу конечных элементов. Значения нормальных напряжений в процентном соотношении в центре сечения, а также в пределах низкомодульного материала не сравниваются, так как эти величины малы.

Из таблицы видно, что при учете сдвиговых и поперечных деформаций нормальные напряжения в крайней фибре возрастают на 12 % (задача 1, сечения 1 и 7).

Дополнительно был выполнен расчет по методу конечных элементов объемной модели состоящей из 3000 четырехузловых элементов пластин. В этом расчете учтены модуль сдвига и коэффициент Пуассона для

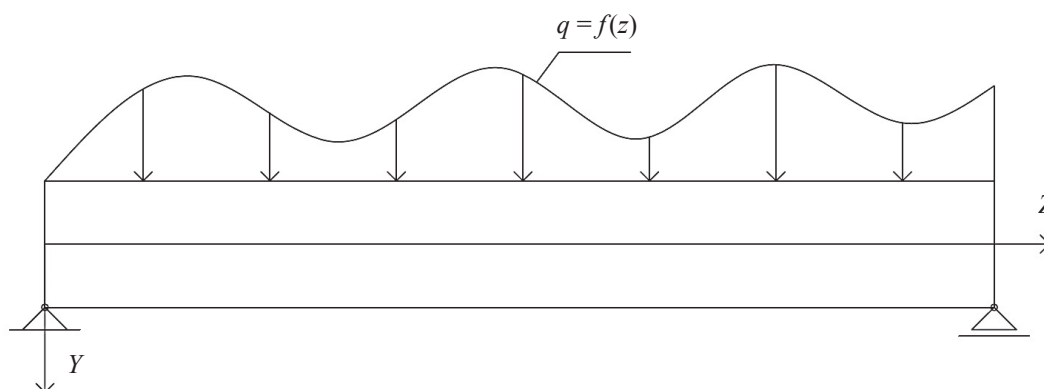


Рис. 1. Принятые оси координат. Расчетная схема

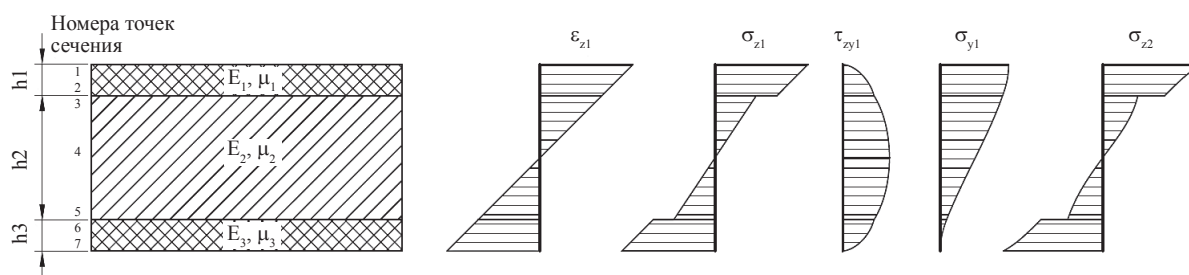


Рис. 2. Схема слоистой балки. Характерные эпюры деформаций и напряжений

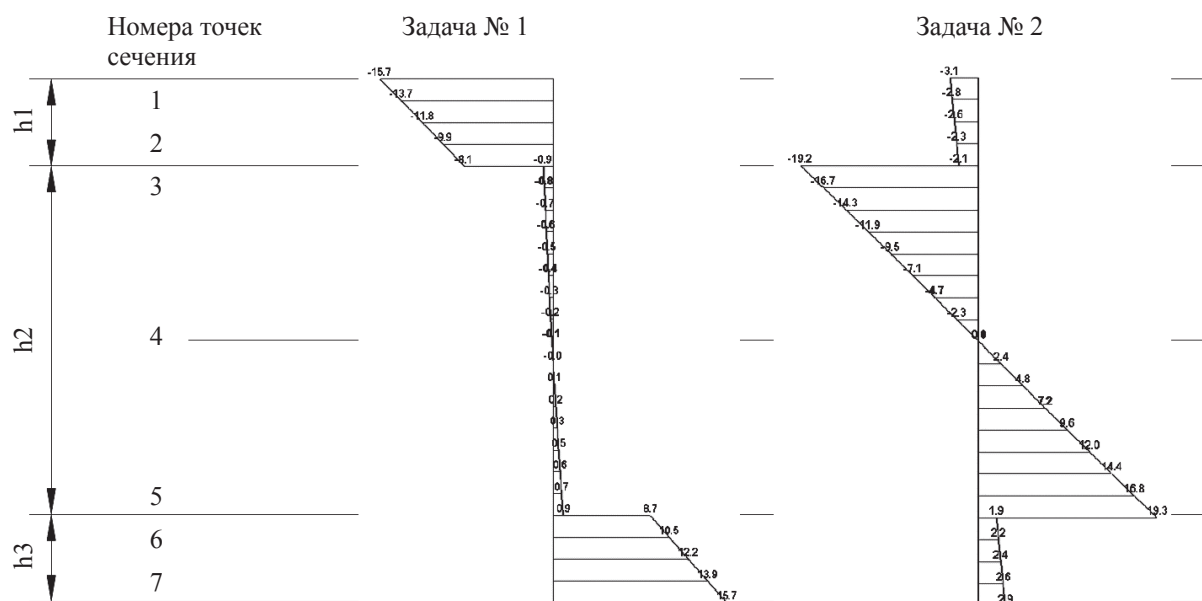


Рис. 3. Эпюры нормальных напряжений в четверти пролета для задач № 1 и 2 по программе *Midas Civil* (σ_z , kH/m^2)

ТАБЛИЦА. Значения нормальных напряжений

Задача	Номер точки сечения*	Цикл 1 σ_z , kH/m^2	Цикл 2 σ_z , kH/m^2	<i>Midas Civil</i> σ_z , kH/m^2
1	1	-14,655	-15,398	-15,678
	2	-9,7698	-9,9177	-8,066
	3	-0,97698	-0,22193	-0,897
	4	0	0,009191	0
	5	0,97698	0,24355	0,871
	6	9,7698	9,8758	8,744
	7	14,655	15,363	15,655
2	1	-2,9309	-3,1968	-3,071
	2	-1,954	-2,0423	-2,344
	3	-19,54	-19,363	-19,2
	4	0	-0,018286	-0,044
	5	19,54	19,329	19,268
	6	1,954	2,1104	2,161
	7	2,9309	3,2713	2,89

* Номера точек сечения обозначены на рис. 2.

материала. При такой постановке задачи нет необходимости принимать гипотезы, которые используются при аналитическом решении

в первом цикле. Следовательно, решение, полученное с использованием программного комплекса *Midas Civil*, является более

точным, чем аналитическое решение, полученное в первом цикле.

Максимальные продольные напряжения, полученные за два цикла, отличаются от напряжений, полученных по методу конечных элементов менее чем на 2 % (задача 1, сечения 1 и 7; задача 2, сечения 3 и 5). Близость результатов во втором цикле при аналитическом решении и результатов, полученных по методу конечных элементов, говорит о приближении к точному решению.

Заключение

1. В среде *MathCAD* был реализован алгоритм расчета на прочность слоистых балок, основанный на итерационном способе последовательного удовлетворения условиям равновесия и совместности деформаций. По данному алгоритму решено две задачи.

2. Те же задачи решены методом конечных элементов с использованием программного комплекса *Midas Civil*. Приведены результаты.

3. Учет сдвиговых и поперечных деформаций с помощью метода итераций повысил точность решения на 12 %.

4. Максимальные продольные напряжения, полученные за два цикла, отличаются от напряжений, полученных по методу конечных элементов менее чем на 2 %.

Библиографический список

1. Итерационный метод расчета балок с изменяющимися по высоте характеристиками / Б. М. Аллахвердов // Исследования по механике материалов и конструкций : сб. научн. статей. – Вып. 12. – СПб. : Петербургский гос. ун-т путей сообщения, 2002. – С. 30–34.

2. Теория упругости / М. М. Филоненко-Бородич. – М. : Гос. изд-во физико-механической литературы, 1959. – 364 с.

3. Прикладная механика твердого деформируемого тела. Т. 2 / А. П. Филин. – М. : Наука ; Главная редакция физико-математической литературы, 1978. – С. 616.

УДК 621.941.01: 629.4.027.4

Д. А. Потахов

Петербургский государственный университет путей сообщения

МЕТОД ПОДОБИЯ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЙ ПРИ ВОССТАНОВЛЕНИИ ПРОФИЛЯ ПОВЕРХНОСТИ КАТАНИЯ КОЛЕСНЫХ ПАР ПОВЫШЕННОЙ ТВЕРДОСТИ

Представлена методика расчета параметров и режимов процесса обточки железнодорожных колес повышенной твердости с использованием метода подобия. Даны рекомендации по выбору рациональных режимов резания.

цельнокатаное колесо, колесная пара, режущий инструмент, восстановление поверхности катания, режимы резания.

Введение

Важнейшим требованием современного машиностроения к используемому станочному и инструментальному оборудованию

является обеспечение установленной точности и качества обработанной поверхности катания колесной пары (КП) при требуемой производительности труда. Производительность процесса механической обработки ко-