

Библиографический список

1. **Информационные** материалы по применению современных конструкций верхнего строения трамвайных путей / Отчет о НИР ПГУПС [рук. Е. П. Дудкин ; исп. Ю. Г. Параскевопуло и др.]. – СПб. : Петербургский гос. ун-т путей сообщения, 2006. – 87 с.
2. **Параметрическое** моделирование строительных конструкций : учеб. пособие / В. В. Свитин. – СПб. : Петербургский гос. ун-т путей сообщения, 2011. – 47 с.
3. **Разработка** моделей конструкций и сооружений : учеб. пособие / В. В. Свитин. – СПб. : Петербургский гос. ун-т путей сообщения, 2009. – 85 с.
4. **Текущий** ремонт трамвайных путей / Отчет о НИР. № 318 ФГБОУ ПГУПС [под ред. М. В. Малахова ; исп. Е. П. Дудкин, Ю. Г. Параскевопуло и др.]. – СПб. : Петербургский гос. ун-т путей сообщения.
5. **Защита** от повышенного шума и вибрации : сб. докладов Всероссийской научно-практической конференции с международным участием (26–28 марта 2013 г., СПб.) / Под ред. Н. И. Иванова. – СПб. : Изд-во БГТУ (Военмех), 2013. – 743 с.
6. **Альбом** «Дорожные конструкции для Ленинграда» А-385-88. – СПб. : Изд-во Института «Ленгипроинжпроект», 1990. – 82 с.
7. **Альбом** типовых конструкций трамвайных путей применяемых в Санкт-Петербурге (классификация конструкций). – СПб. : Генеральная строительная корпорация, 2000. – 63 с.
8. **ГОСТ Р ИСО 14837-1-2007**. Шум и вибрация, создаваемые движением рельсового транспорта. – Введ. 2008-10-01. – Н. Новгород : ОАО НИЦ КД, 2008. – 39 с.
9. **СП 98.13330.2012**. Свод правил. Трамвайные и троллейбусные линии. Актуализированная редакция СНиП 2.05.09.90. – Введ. 2013-01-01. – М., 2013. – 78 с.
10. **ТУ 2539-001-03222089-2011**. Профили резиновые подошвенные под рельс трамвайных путей. – Введ. 2012-03-29. – СПб. : СПБ ГУП «Горэлектротранс», 2012. – 13 с.
11. **ТУ 2539-002-03222089-2011**. Профили резиновые боковые для рельсов трамвайных путей. – Введ. 2012-03-29. – СПб. : СПБ ГУП «Горэлектротранс», 2012. – 13 с.

УДК 681.518.5:004.052.32

Вал. В. Сапожников, Вл. В. Сапожников, Д. В. Ефанов, А. А. Блюдов

Петербургский государственный университет путей сообщения

**ПРИМЕНЕНИЕ КОДОВ БЕРГЕРА И ХЭММИНГА
В СХЕМАХ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО КОНТРОЛЯ**

Анализируются свойства кодов Бергера и Хэмминга, применяемых при синтезе схем функционального контроля. Рассматриваются свойства данных кодов в случае искажений в информационных разрядах при безошибочности контрольных разрядов. Приводится метод построения разделимых кодов в виде таблиц, характеризующих соответствие информационных векторов контрольным. На его основании найдены и обоснованы формулы расчета числа обнаруживаемых ошибок в информационных разрядах кодов Бергера и Хэмминга. Введено два критерия оценки качества кодов в схемах функционального контроля: обнаруживающая способность и коэффициент эффективности кода. Коды Бергера и Хэмминга сравниваются по способности к обнаружению искажений в информационных векторах и эффективности в виде каталога свойств для кодов с длинами информационных векторов $m \leq 31$. Приводятся графики изменения обнаруживающей способности и эффективности кодов Бергера и Хэмминга при увеличении длины информационного вектора. Показано, что с увеличением числа информационных разрядов доля

необнаруживаемых ошибок в обоих классах кодов уменьшается и при $m \rightarrow \infty$ стремится к нулю. Сформулирована теорема об оптимальном коде для обнаружения ошибок в информационных векторах и установлен ряд новых свойств кодов Хэмминга и Бергера при различных соотношениях между длинами информационных векторов рассматриваемых кодов.

функциональный контроль, код Бергера, код Хэмминга, информационный вектор, необнаруживаемая ошибка, обнаруживающая способность, свойства кодов.

Введение

Система функционального контроля [1–4] содержит три блока: контролируемое логическое устройство $f(x)$, блок дополнительной логики $g(x)$ и тестер, устанавливающий соответствие между выходами обоих блоков – $f(x)$ и $g(x)$ (рис. 1).

Комбинационная схема $f(x)$ реализует булевы функции $f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)$. На схему $f(x)$ с течением времени могут действовать помехи, что может вызывать искажения в вычисленных значениях функций. Для контроля блока $f(x)$ параллельно исходной комбинационной схеме устанавливается блок дополнительной логики $g(x)$, который вычисляет такие функции $g_1(x), g_2(x), \dots, g_k(x)$, что рабочие выходные векторы обоих блоков $\langle f_1 f_2 \dots f_m g_1 g_2 \dots g_k \rangle$ являются кодовыми словами некоторого заранее выбранного кода с обнаружением ошибок. Схема также снабжается устройством контроля формируемого

кодированного вектора – тестером. В случае искажения выходного вектора $\langle f_1 f_2 \dots f_m g_1 g_2 \dots g_k \rangle$ на выходах тестера устанавливается непарафазный сигнал $\langle 00 \rangle$ либо $\langle 11 \rangle$.

В данной структуре эффективным является применение кодов Хэмминга и Бергера, которые относятся к классу разделимых кодов. В них для каждого кодированного слова значения контрольных разрядов вычисляются по значениям информационных разрядов. Информационный вектор кода (его длина равна m) формируется на выходах f_1, f_2, \dots, f_m блока $f(x)$, а контрольный вектор (его длина равна k) – на выходах g_1, g_2, \dots, g_k блока $g(x)$. Для векторов кодов Бергера [5] в контрольной части записывается двоичное число, равное числу единиц в информационной части. Число контрольных разрядов при этом вычисляется как $k = \lceil \log_2(m+1) \rceil$. Далее будем обозначать код Бергера как $S(n, m)$ -код, где $n = m + k$.

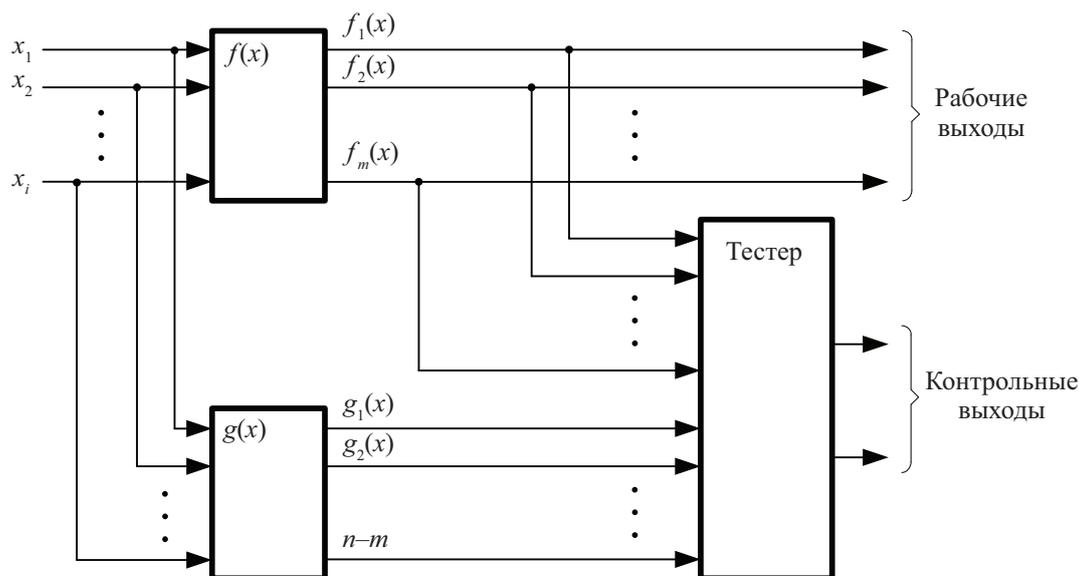


Рис. 1. Структура системы функционального контроля

В коде Хэмминга [6] контрольные разряды образуются как линейная сумма (сумма по модулю два) информационных разрядов, стоящих на определенных позициях в информационном векторе. Суммируемые позиции определяются двоичными номерами информационных и контрольных векторов. Каждый контрольный разряд занимает в векторе кода Хэмминга позицию с номером 2^i . Для получения значения i -го контрольного разряда берется линейная сумма тех информационных разрядов, в двоичном эквиваленте номеров которых на i -м месте справа расположена единица. Таким образом, число контрольных разрядов находится в зависимости от числа информационных: это ближайшее целое, удовлетворяющее неравенству: $2^k - k \geq m + 1$.

В отличие от кодов Бергера, коды Хэмминга ($H(n, m)$ -коды) способны корректировать однократные искажения, однако в дальнейшем используются только свойства кодов с позиции возможности обнаружения искажений в информационных векторах, что актуально для схем функционального контроля (см. рис. 1).

Как отмечалось выше, в процессе функционирования контролируемого логического устройства $f(x)$ в его внутренней структуре возможны сбои. Сбои могут вызывать искажения вычисляемых функций f_1, f_2, \dots, f_m , часть из которых может быть не обнаружена. Искажения в блоке дополнительной логики $g(x)$ обнаруживаются схемой тестера всегда, так как нарушают контрольные функции g_1, g_2, \dots, g_k . Исходя из этого, далее рассматриваются обнаруживающие способности кодов Бергера и Хэмминга в предположении о потенциальном возникновении искажений только в информационных разрядах при безошибочности контрольных разрядов.

1 Обнаруживающие способности делимых кодов

Как отмечалось ранее, коды Бергера и Хэмминга содержат информационные и

контрольные векторы, т. е. являются делимыми. Каждому информационному слову поставлено в соответствие некоторое контрольное слово. При этом контрольные слова для разных информационных слов могут совпадать. В табл. 1 приведены все кодовые векторы кодов $S(7,4)$ и $H(7,4)$.

Правила построения кода определяют такой важный параметр, как *обнаруживающую способность* кода. Для любого делимого кода ошибка в информационном векторе не будет обнаруживаться, если приведет к переходу в информационный вектор с тем же контрольным вектором. Рисунок 2 содержит пример необнаруживаемых искажений информационных векторов кодов $S(7,4)$ и $H(7,4)$. К необнаруживаемым ошибкам кодов с суммированием относятся разнонаправленные ошибки в информационных разрядах четной кратности d , содержащие равное количество искажений $0 \rightarrow 1$ и $1 \rightarrow 0$, а для кодов Хэмминга это некоторые ошибки кратностей $d > 2$.

Исходя из свойства обнаружения ошибок в информационных разрядах, любой делимый код (в том числе рассматриваемые коды Бергера и Хэмминга) можно задать в виде таблицы, где для каждого контрольного вектора перечислены все соответствующие ему информационные векторы. Тогда все необнаруживаемые ошибки будут связаны с переходами информационных векторов друг в друга в одной группе контрольного вектора.

Для кода Бергера такая таблица содержит $m + 1$ столбец и в каждом из них располагается C_m^r информационных векторов, где r — вес кодового вектора [7]. Код $S(7,4)$ задается таблицей 2.

Опираясь на способ задания $S(n, m)$ -кода в табличной форме и свойство разнонаправленности необнаруживаемых ошибок, можно вывести формулу расчета числа необнаруживаемых ошибок в кодах Бергера.

Будем подсчитывать необнаруживаемые ошибки в каждой группе r по всем возможным кратностям d , а затем суммировать полученные числа. В группе r размещено C_m^r информационных векторов. Ошибка кратности

ТАБЛИЦА 1. Коды $S(7,4)$ и $H(7,4)$

Информационные разряды				$S(n, m)$ -код			$H(n, m)$ -код		
x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	y_1	y_2	y_3
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	0	0	1	0	1	1
0	0	1	1	0	1	0	1	0	0
0	1	0	0	0	0	1	1	0	1
0	1	0	1	0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	0	1	0	1	1	0
0	1	1	1	0	1	1	0	0	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	0
1	0	0	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	0	1	0	1	0	1
1	0	1	1	0	1	1	0	1	0
1	1	0	0	0	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	1	1	0	0
1	1	1	0	0	1	1	0	0	0
1	1	1	1	1	0	0	1	1	1

d является необнаруживаемой, если число искажений $1 \rightarrow 0$ равно числу искажений $0 \rightarrow 1$, при этом число тех и других типов искажений будет равно $\frac{d}{2}$. Тогда число вариантов искажений $1 \rightarrow 0$ среди r единичных разрядов будет равняться $C_r^{\frac{d}{2}}$. В свою очередь, число вариантов искажений $0 \rightarrow 1$ среди оставшихся $m-r$ -разрядов, равных нулю, будет вычисляться как $C_{m-r}^{\frac{d}{2}}$. Другими словами, в группе r для кратности d будет $C_m^r C_r^{\frac{d}{2}} C_{m-r}^{\frac{d}{2}}$ необнаруживаемых ошибок.

Исходя из вышеизложенных рассуждений, общее число необнаруживаемых искажений информационных векторов кодов Бергера можно рассчитать по формуле:

$$N = \sum_{r=1}^{m,m-1} N_r = \sum_{r=1}^{m,m-1} \left(\sum_{d=2}^{2r,2(m-r)} C_m^r C_r^{\frac{d}{2}} C_{m-r}^{\frac{d}{2}} \right), \quad (1)$$

где $d = 2, 4, \dots, 2r$, если $2r \leq m, m-1$ (где m – четное и нечетное соответственно) – четное число; $d = 2, 4, \dots, 2(m-r)$, если $2(m-r) \leq m, m-1$ – нечетное число.

Отметим также, что в работе [7] предложена аналогичная формула подсчета числа необнаруживаемых ошибок в информационных разрядах кодов Бергера с той лишь

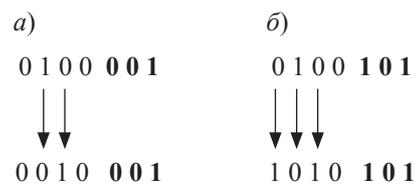


Рис. 2. Необнаруживаемые ошибки:
 а – в коде $S(7,4)$; б – в коде $H(7,4)$

ТАБЛИЦА 2. Задание кода $S(7,4)$

Веса групп	r				
	0	1	2	3	4
	Двоичные номера групп				
	000	001	010	011	100
Информационные векторы	0000	0001	0011	0111	1111
		0010	0101	1011	
		0100	0110	1101	
		1000	1001	1110	
			1010		
		1100			
Число информационных векторов	1	4	6	4	1
Число необнаруживаемых искажений в группе	0	12	30	12	0

разницей, что сначала производится подсчет ошибок кратности $d = 2$ во всех группах информационных векторов, затем $d = 4$ и т. д., до максимально возможной кратности $d = m$ либо $d = m - 1$ (соответственно для четных и нечетных m), а затем суммируются полученные числа.

В отличие от кодов Бергера, для кодов Хэмминга распределение информационных векторов на группы является равномерным (табл. 3).

Исследования кодов Хэмминга при увеличении длины информационного вектора показывают сохранение тенденции равномерного распределения информационных векторов на группы по контрольным векторам. Поскольку число контрольных векторов равно 2^k , то в каждой группе размещается по 2^{m-k} информационных векторов. Они могут переходить друг в друга $(2^{m-k} - 1)$ -м способом. В каждой группе 2^{m-k} $(2^{m-k} - 1)$ таких переходов. Умножая эту величину

ТАБЛИЦА 3. Задание кода $H(7,4)$

Веса групп	r							
	0	1	2	3	4	5	6	7
	Двоичные номера групп							
	000	001	010	011	100	101	110	111
Информационные векторы	0000	0111	0101	0010	0011	0100	0110	0001
	1110	1001	1011	1100	1101	1010	1000	1111
Число информационных векторов	2	2	2	2	2	2	2	2
Число необнаруживаемых искажений в группе	2	2	2	2	2	2	2	2

на количество контрольных групп, приходим к формуле расчета числа необнаруживаемых искажений информационных разрядов для кодов Хэмминга:

$$N_m = 2^m (2^{m-k} - 1). \quad (2)$$

Коды $S(7,4)$ и $H(7,4)$ имеют одинаковое число контрольных разрядов $k = 3$, однако из-за различного распределения информационных векторов на группы контрольных векторов обнаруживают различное количество ошибок в информационных векторах. Код $S(7,4)$ не обнаруживает 54 ошибки в информационных разрядах (это 48 двукратных искажений и 6 четырехкратных), а код $H(7,4)$ – 16 ошибок в информационных разрядах (все эти ошибки имеют кратности $d = 3$). В табл. 4 приводятся числа необнаруживаемых искажений в информационных разрядах кодов Бергера и Хэмминга при различных значениях m .

Анализ таблицы 4 показывает более высокую способность к обнаружению ошибок в информационных векторах у кодов Хэмминга в сравнении с кодами Бергера. Как показано в [8], это связано с распределением информационных векторов на группы контрольных векторов.

Теорема 1. *Минимальное общее число необнаруживаемых ошибок информационных разрядов имеет код с равномерным размещением информационных векторов в группах контрольных векторов, причем каждая группа содержит ровно по 2^{m-k} элементов.*

Исходя из теоремы 1, код Хэмминга является оптимальным по обнаружению ошибок в информационных разрядах. Однако он не оптимален по избыточности. Сравнивая коды Бергера и Хэмминга, отмечаем, что при некоторых m коды Бергера имеют на один контрольный разряд меньше, нежели коды Хэмминга (см. табл. 4).

В табл. 4, в столбце α_m приведено отношение числа необнаруживаемых ошибок в $S(n, m)$ -кодах к числу необнаруживаемых ошибок в $H(n, m)$ -кодах: $\alpha_m = \frac{N_m(S)}{N_m(H)}$.

Проанализируем величину α_m . На промежутках $m \in \{4; 7\}$ и $m \in \{8; 15\}$ с увеличением m происходит уменьшение величины α_m . Число контрольных разрядов в кодах Бергера остается неизменным ($k = 3$ и $k = 4$ соответственно), а для кодов Хэмминга при $m = 5$ и $m = 12$ увеличивается на 1 в сравнении с кодами Бергера. Этого, однако, недостаточно, чтобы повлиять на характер изменения α_m : в первом случае происходит уменьшение α_m от 3,375 до 1,721, а во втором – от 3,285 до 2,312. Иначе обстоит дело при $k = 5$ для кодов Бергера (данный промежуток состоит из двух участков $m \in \{16; 26\}$ и $m \in \{27; 31\}$ – на первом из них у кодов Хэмминга $k = 5$, на втором $k = 6$). При одинаковых k для кодов Хэмминга и Бергера происходит уменьшение α_m от 4,48 до 3,524. При $m = 27$ число контрольных разрядов в кодах Хэмминга увеличивается на 1, что влияет на число необнаруживаемых ошибок; α_m , в свою очередь, увеличивается почти вдвое и с дальнейшим увеличением m до 31 уменьшается от 6,917 до 6,459. Из табл. 4 следует, что при одинаковых m коды Хэмминга имеют более высокую обнаруживающую способность, чем коды Бергера.

Под *обнаруживающей способностью* кода в дальнейшем будем понимать отношение числа необнаруживаемых искажений информационных разрядов к общему числу искажений информационных разрядов:

$$\gamma_m = \frac{N_m}{N}. \quad (3)$$

Рассчитанные значения величин γ_m для различных кодов Хэмминга и Бергера представлены в табл. 4. Зависимость обнаруживающей способности кодов от длины информационного вектора m представлена на рис. 3.

В последних двух столбцах табл. 4 приводится еще один параметр – *коэффициент эффективности кода* ξ_m – отношение числа необнаруживаемых ошибок в коде с равномерным распределением информационных векторов на группы контрольных векторов при данном k к общему числу искажений

ТАБЛИЦА 4. Необнаруживаемые ошибки в кодах Бергера и Хэмминга

m	k		N_m		Общее число искажений, N	α_m	γ_m		Коэффициент эффективности, ξ_m	
	$S(n, m)$	$H(n, m)$	$S(n, m)$	$H(n, m)$			$S(n, m)$	$H(n, m)$	$S(n, m)$	$H(n, m)$
3	2	3	12	8	56	1,5	0,214	0,143	0,667	1
4	3	3	54	16	240	3,375	0,225	0,067	0,296	1
5	3	4	220	32	992	2,292	0,222	0,032	0,436	1
6	3	4	860	192	4032	1,92	0,213	0,048	0,521	1
7	3	4	3304	896	16256	1,721	0,203	0,055	0,581	1
8	4	4	12614	3840	65280	3,285	0,193	0,059	0,304	1
9	4	4	48108	15872	261632	3,031	0,184	0,061	0,33	1
10	4	4	183732	64512	1047552	2,848	0,175	0,062	0,351	1
11	4	4	703384	260096	4192256	2,704	0,168	0,062	0,37	1
12	4	5	2700060	520192	16773120	2,585	0,161	0,031	0,387	1
13	4	5	10392408	2088960	67100672	2,483	0,155	0,031	0,403	1
14	4	5	40100216	8372224	268419072	2,392	0,149	0,031	0,418	1
15	4	5	155084752	33521664	1073709056	2,312	0,144	0,031	0,433	1
16	5	5	601014854	134152192	4294901760	4,48	0,14	0,031	0,223	1
17	5	5	2333475148	536739840	17179738112	4,347	0,136	0,031	0,23	1
18	5	5	9074873156	2147221504	68719214592	4,226	0,132	0,031	0,237	1
19	5	5	35344739512	8589410304	2,74877·10 ¹¹	4,115	0,129	0,031	0,243	1
20	5	5	1,37845·10 ¹¹	34358689792	1,09951·10 ¹²	4,012	0,125	0,031	0,249	1
21	5	5	5,38256·10 ¹¹	1,37437·10 ¹¹	4,39804·10 ¹²	3,916	0,122	0,031	0,255	1
22	5	5	2,10409·10 ¹²	5,49752·10 ¹¹	1,75922·10 ¹³	3,827	0,12	0,031	0,261	1
23	5	5	8,23342·10 ¹²	2,19901·10 ¹²	7,03687·10 ¹³	3,744	0,117	0,031	0,267	1
24	5	5	3,22476·10 ¹³	8,79608·10 ¹²	2,81475·10 ¹⁴	3,666	0,115	0,031	0,273	1
25	5	5	1,26411·10 ¹⁴	3,51843·10 ¹³	1,1259·10 ¹⁵	3,593	0,112	0,031	0,278	1
26	5	5	4,95918·10 ¹⁴	1,40737·10 ¹⁴	4,5036·10 ¹⁵	3,524	0,11	0,031	0,284	1
27	5	6	1,94694·10 ¹⁵	2,81475·10 ¹⁴	1,80144·10 ¹⁶	6,917	0,108	0,016	0,289	1
28	5	6	7,64869·10 ¹⁵	1,1259·10 ¹⁵	7,20576·10 ¹⁶	6,793	0,106	0,016	0,294	1
29	5	6	3,00673·10 ¹⁶	4,5036·10 ¹⁵	2,8823·10 ¹⁷	6,676	0,104	0,016	0,3	1
30	5	6	1,18265·10 ¹⁷	1,80144·10 ¹⁶	1,15292·10 ¹⁸	6,565	0,103	0,016	0,305	1
31	5	6	4,65428·10 ¹⁷	7,20576·10 ¹⁶	4,61169·10 ¹⁸	6,459	0,101	0,016	0,31	1

в информационных разрядах рассматриваемого кода [8]:

$$\xi_m = \frac{N_m^{\min}}{N_m}. \quad (4)$$

Код Хэмминга является оптимальным в своем классе и имеет постоянную величину $\xi_m = 1$, тогда как у кода Бергера ξ_m является переменной величиной, имеющей некоторую закономерность: эффективность кодов Бергера снижается при увеличении длины контрольного вектора k , а для кодов с постоянным значением числа контрольных разрядов k происходит увеличение коэффициента эффективности от кода с числом информационных разрядов $m = 2^{k-1}$ к коду с числом

информационных разрядов $m = 2^k - 1$. Например, при $k = 3$ код с $m = 4$ обладает наименьшей эффективностью, а код с $m = 7$ – наибольшей. Графики на рис. 4 иллюстрируют данные свойства кодов Хэмминга и Бергера.

2 Сравнение кодов Бергера и Хэмминга по способности к обнаружению ошибок в информационных разрядах

В [7] доказано следующее замечательное свойство, характерное для кодов Бергера.

Теорема 2. Доля необнаруживаемых ошибок информационных разрядов кратности d

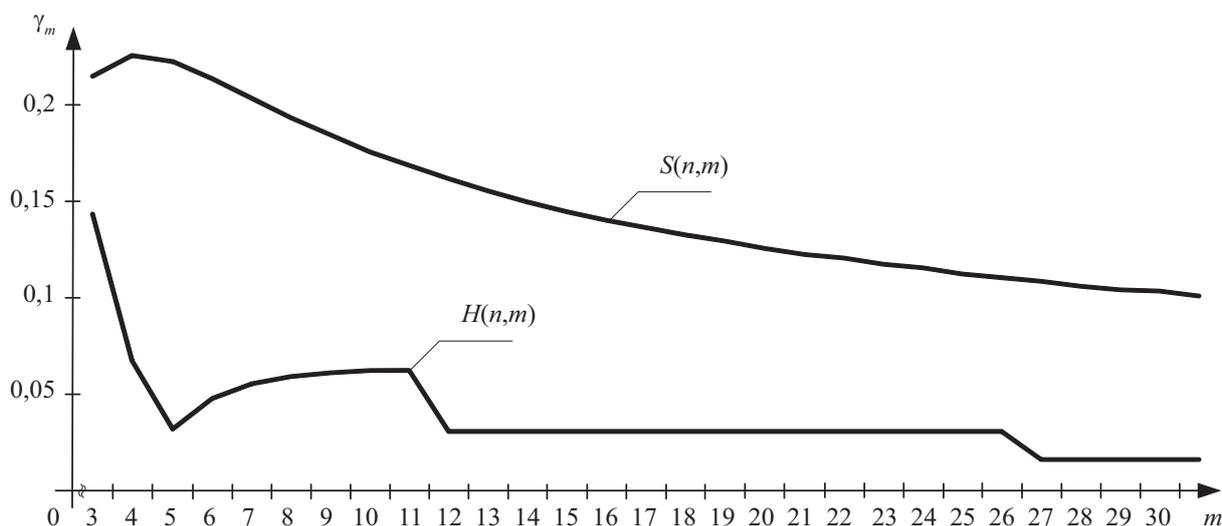


Рис. 3. Динамика изменения величины γ_m в зависимости от m

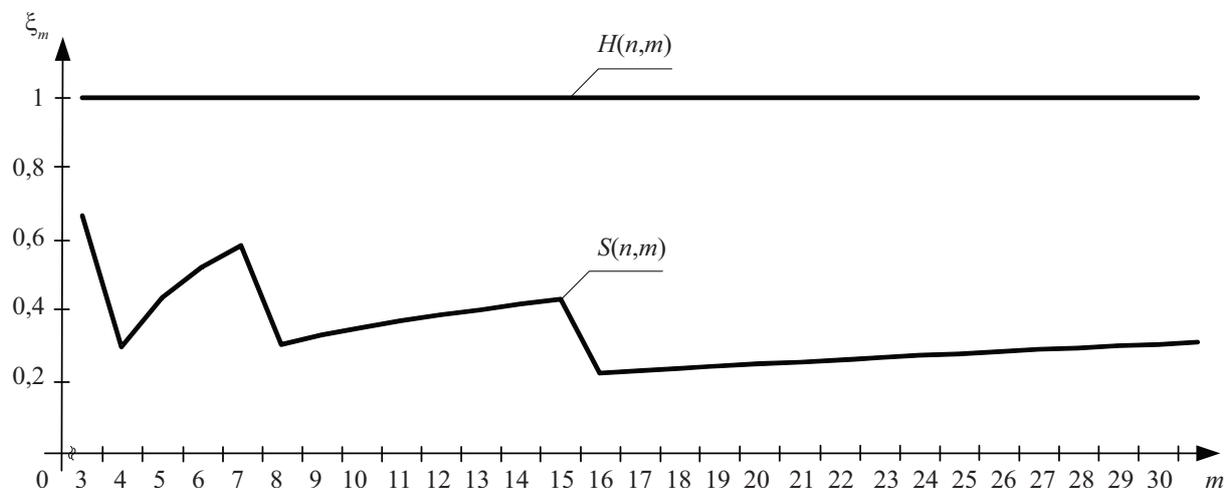


Рис. 4. Зависимость ξ от m

от общего числа ошибок информационных разрядов данной кратности не зависит от числа информационных разрядов и является постоянной величиной:

$$\beta_d = 2^{-d} C_d^{\frac{d}{2}}. \quad (5)$$

Авторами настоящей статьи экспериментально показано, что условие теоремы выполняется и для ряда модульных кодов с суммированием, также используемых при организации схем функционального контроля [9].

Следствие из теоремы 2. Величина β_d – это отношение необнаруживаемых ошибок кратности d (N_m^d) к общему числу ошибок данной кратности, т. е. к величине $2^m C_m^d$. Иными словами,

$$\frac{N_m^d}{2^m C_m^d} = 2^{-d} C_d^{\frac{d}{2}},$$

откуда следует, что число необнаруживаемых ошибок в кодах Бергера также можно вычислить по формуле:

$$N_m = \sum_{d=2}^{m,(m-1)} N_m^d = \sum_{d=2}^{m,(m-1)} 2^{m-d} C_m^d C_d^{\frac{d}{2}}. \quad (6)$$

В табл. 5 представлены рассчитанные значения величины β_d для кодов Бергера при различных кратностях необнаруживаемых искажений информационных векторов.

По табл. 5 видно, что с увеличением кратности величина β_d приближается к нулю.

Условие теоремы 2 не выполняется для кодов Хэмминга, что мы показали экспериментальными расчетами (табл. 6).

Сравнивая между собой величины β_d для $H(n, m)$ -кодов и для $S(n, m)$ -кодов, заметим, что для любого из кодов Хэмминга доля необнаруживаемых ошибок четной кратности d меньше, чем данный показатель при том же d для любого кода Бергера. Так, к примеру, для всех кодов Бергера $\beta_6 = 0,3125$, тогда как для кодов Хэмминга данная величина не превышает 0,07143 (в 4,375 раза меньше, чем у кодов Бергера).

Код Хэмминга обладает таким свойством.

ТАБЛИЦА 5. Значения β_d для кодов Бергера при различных d

d	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	...	100
β_d	0,5	0,375	0,3125	0,27344	0,24609	0,22559	0,20947	0,19638	0,18547	0,1762	...	0,07959

ТАБЛИЦА 6. Значения β_d для некоторых кодов Хэмминга

Код	Кратность ошибок, d							
	3	4	5	6	7	8	9	10
$H(6,3)$	1							
$H(7,4)$	0,25	0						
$H(9,5)$	0,1	0	0					
$H(10,6)$	0,1	0,06667	0	0				
$H(11,7)$	0,05714	0,08571	0,09524	0	0			
$H(12,8)$	0,08929	0,07143	0,03571	0,07143	0,125	0		
$H(13,9)$	0,08333	0,07143	0,04762	0,07143	0,08333	0	0	
$H(14,10)$	0,08333	0,07143	0,04762	0,07143	0,08333	0	0	1
$H(15,11)$	0,07879	0,07576	0,05411	0,05844	0,0697	0,06061	0,05455	0,09091

Теорема 3. При постоянном $k > 5$ доля необнаруживаемых ошибок в информационных разрядах от общего числа ошибок информационных разрядов в кодах Хэмминга постоянна:

$$\gamma_m = 2^{-k}. \quad (7)$$

Величина γ_m вычисляется по формуле (3): в знаменателе ее представлено общее число необнаруживаемых ошибок информационных разрядов, а это количество переходов каждого информационного вектора в каждый $-2^m(2^m - 1)$, в числителе же – число необнаруживаемых ошибок (см. формулу (2)). Тогда для кодов Хэмминга γ_m вычисляется так:

$$\gamma_m = \frac{N_m}{N} = \frac{2^m(2^{m-k} - 1)}{2^m(2^m - 1)} = \frac{2^{m-k} - 1}{2^m - 1}. \quad (8)$$

Для доказательства утверждения теоремы 3 необходимо вычислить предел выражения (8):

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \gamma_m &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{2^{m-k} - 1}{2^m - 1} = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{2^m - 1}{2^m - 1} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{2^m - 1}{2^m - 1} = \end{aligned} \quad (9)$$

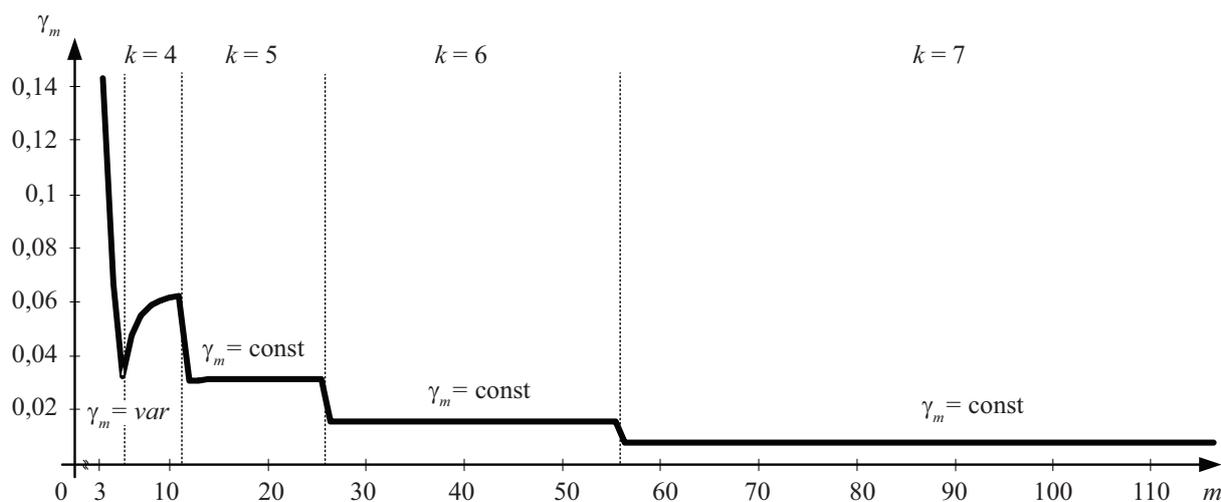


Рис. 5. Зависимость γ_m от m

$$= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^m}}{1 - \frac{1}{2^m}} = 2^{-k}.$$

График изменения величины γ_m (рис. 5) и многочисленные расчеты подтверждают данное свойство.

Сравнивая табл. 5 и 6, отмечаем, что $H(n, m)$ -код не имеет необнаруживаемых искажений информационных разрядов кратностей $d \leq 2$, а большинство $H(n, m)$ -кодов – также и необнаруживаемых искажений кратностей $d \geq m - 1$. Однако, в отличие от кодов Бергера, где в классе необнаруживаемых присутствуют только некоторые искажения четных кратностей, коды Хэмминга не обнаруживают часть искажений кратностей $d \in [3; m - 2]$. В общем случае коды Хэмминга имеют приоритет по обнаруживающей способности. К примеру, код $S(14, 10)$ не обнаруживает 183 732 ошибки в информационных векторах, что в 2,848 раза больше, чем код $H(14, 10)$, не обнаруживающий 64 512 искажений информационных векторов. С другой стороны, коды Бергера и Хэмминга при одинаковой длине информационных векторов могут иметь различное число контрольных разрядов (k и $k + 1$ соответственно), что влияет на сложность контрольной аппаратуры системы функционального диагностирования (см. рис. 1).

Вообще, с увеличением числа k диапазонов сравнимых между собой кодов Бергера и Хэмминга (таких кодов, которые имеют одинаковые длины контрольных векторов) увеличивается (табл. 7). Так, при $k = 3$ можно сравнить между собой только коды $S(7,4)$ и $H(7,4)$, рассмотренные во втором разделе статьи (см. табл. 2 и 3). С увеличением k диапазон длин информационных векторов экспоненциально расширяется (рис. 6). Для кодов с $k = 10$ существует 502 сравнимых кода Бергера и Хэмминга.

С практической точки зрения сравнимые между собой коды Бергера и Хэмминга позволяют установить критерии применимости каждого из вариантов кодирования при построении схем функционального контроля

исходя из свойств контролируемой комбинационной схемы $f(x)$. Чем больше значение m , тем большей степенью свободы выбора оптимального кода с необходимым количеством контрольных разрядов обладает разработчик.

Отметим еще одно свойство, которое прослеживается по графикам рис. 3.

Теорема 4. Доля необнаруживаемых ошибок информационных разрядов от общего числа ошибок информационных разрядов в кодах Бергера и Хэмминга с увеличением m уменьшается и при $m \rightarrow \infty$ стремится к нулю.

Для кодов Бергера теорема 4 доказана в [10]; для кодов Хэмминга доказательство тривиально и непосредственно следует из теоремы 3.

ТАБЛИЦА 7. Диапазоны сравнимых кодов Хэмминга и Бергера, совпадающие по длине

k	m	Диапазон совпадающих значений m
3	4	1
4	8–11	4
5	16–26	11
6	32–57	26
7	64–120	57
8	128–247	120
9	256–502	247
10	512–1013	502
11	1024–2037	1013
12	2048–4084	2036
13	4096–8179	4083
14	8192–16370	8178
15	16384–32753	16369
16	32768–65520	32752
17	65536–131055	65519
18	131072–262126	131054
19	262144–524269	262125
20	524288–1048556	524268

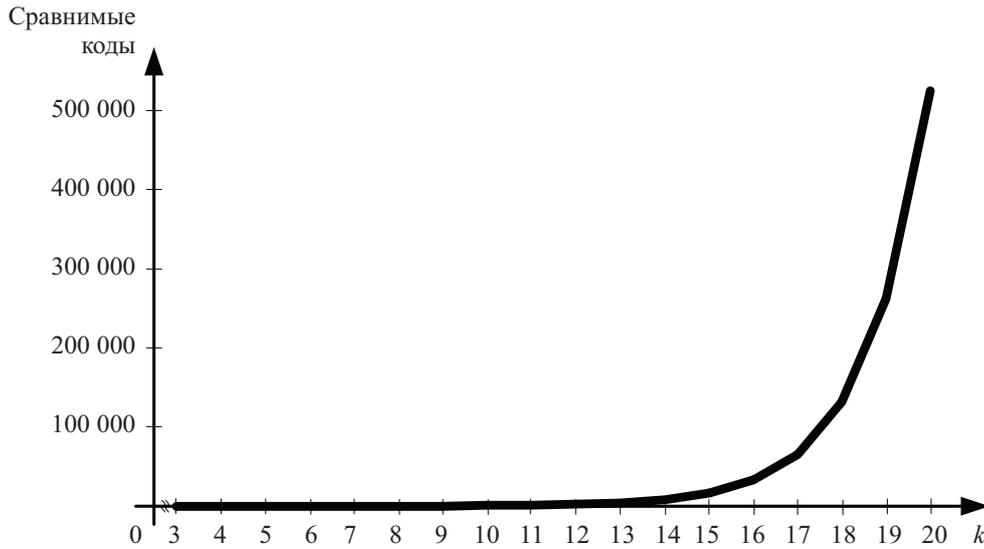


Рис. 6. Зависимость изменения числа сравнимых кодов от k

3 Некоторые свойства кодов Бергера и Хэмминга

В [7] установлены некоторые свойства кодов Бергера по обнаружению ошибок в схемах функционального контроля, а именно кодов с длинами информационных векторов, различающихся на единицу (кодов с m и $m + 1$ информационным разрядом). Обобщим здесь данные свойства на случай различия длин информационных разрядов сравниваемых кодов на величину i , т. е. коды $S(n, m)$ и $S(n', m + i)$. Здесь n' – число разрядов в коде с $m + i$ информационными разрядами.

Используя выражение (6), запишем отношение числа необнаруживаемых ошибок кратности d в коде $S(n', m + i)$ к той же величине в коде $S(n, m)$:

$$\begin{aligned} \delta_{m,d} &= \frac{N_{m+i}^d}{N_m^d} = \\ &= \frac{2^{m+i-d} C_{m+i}^d C_d^{\frac{d}{2}}}{2^{m-d} C_m^d C_d^{\frac{d}{2}}} = 2^i \cdot \frac{C_{m+i}^d}{C_m^d} = \\ &= 2^i \cdot \frac{(m+1)(m+2) \times \dots \times (m+i-1)(m+i)}{(m-d+1)(m-d+2) \times \dots \times (m-d+i-1)(m-d+i)}. \end{aligned} \tag{10}$$

Будем увеличивать число m , в предельном случае получим:

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \delta_{m,d} &= \lim_{m \rightarrow \infty} 2^i \times \\ &\times \frac{(m+1)(m+2) \times \dots \times (m+i-1)(m+i)}{(m-d+1)(m-d+2) \times \dots \times (m-d+i-1)(m-d+i)} = \\ &= 2^i \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{m}{m} + \frac{1}{m}\right) \left(\frac{m}{m} + \frac{2}{m}\right) \times \dots \times \left(\frac{m}{m} + \frac{i-1}{m}\right) \left(\frac{m}{m} + \frac{i}{m}\right)}{\left(\frac{m}{m} - \frac{d}{m} + \frac{1}{m}\right) \left(\frac{m}{m} - \frac{d}{m} + \frac{2}{m}\right) \times \dots \times \left(\frac{m}{m} - \frac{d}{m} + \frac{i-1}{m}\right) \left(\frac{m}{m} - \frac{d}{m} + \frac{i}{m}\right)} = 2^i. \end{aligned} \tag{11}$$

Выражение (11) есть доказательство нижеприведенного свойства кодов Бергера.

Свойство 1. При $m \rightarrow \infty$ число необнаруживаемых ошибок кратности d у кода $S(n', m + i)$ по сравнению с кодом $S(n, m)$ увеличивается в 2^i раз для любого d .

В частности, при рассмотрении двух кодов Бергера с длинами информационных векторов, равными m и $m + 1$ соответственно, имеем:

$$\delta_{m,d} = 2 \cdot \frac{m+1}{m-d+1}; \quad (12)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \delta_{m,d} = 2. \quad (13)$$

Формулы (12) и (13) следуют непосредственно из формул (10) и (11).

Подобным свойством не обладают коды Хэмминга, однако для них нетрудно установить зависимости между общим числом необнаруживаемых ошибок в кодах с m и $m+i$ информационными разрядами. Так, для кодов $H(n, m)$ и $H(n', m+i)$ с использованием выражения (2), записываем:

$$\begin{aligned} \delta_m &= \frac{2^{m+i} (2^{m+i-(k+t)} - 1)}{2^m (2^{m-k} - 1)} = \\ &= \frac{2^i 2^m (2^{m+i-(k+t)} - 1)}{2^m (2^{m-k} - 1)} = \\ &= 2^i \cdot \frac{2^{m+i-(k+t)} - 1}{2^{m-k} - 1}. \end{aligned} \quad (14)$$

В формуле (14) k – число контрольных разрядов кода $H(n, m)$, а t – число, на которое увеличивается контрольный вектор в коде $H(n', m+i)$ при увеличении m на величину i .

Устремляя m к ∞ , получаем:

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \delta_m &= \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} 2^i \cdot \frac{2^{m+i-(k+t)} - 1}{2^{m-k} - 1} = \\ &= 2^i \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^{m+i-(k+t)}}{2^{m-k}} - \frac{1}{2^{m-k}}}{\frac{2^{m-k}}{2^{m-k}} - \frac{1}{2^{m-k}}} = \\ &= 2^i \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{2^{i-t} - \frac{1}{2^{m-k}}}{1 - \frac{1}{2^{m-k}}} = \\ &= 2^i 2^{i-t} = 2^{2i-t}. \end{aligned} \quad (15)$$

Свойство 2. Отношение числа необнаруживаемых ошибок для кодов Хэмминга с m и $m+i$ информационными разрядами и k и $k+t$ контрольными разрядами стремится к 2^{2i-t} при $m \rightarrow \infty$.

В частности, свойство 2 для двух кодов с числом информационных разрядов, различающимся на единицу, принимает следующий вид.

Если число контрольных разрядов не изменилось, имеем:

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \delta_m &= \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} 2 \cdot \frac{2^{m+1-k} - 1}{2^{m-k} - 1} = \\ &= 2 \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^{m+1-k}}{2^{m-k}} - \frac{1}{2^{m-k}}}{\frac{2^{m-k}}{2^{m-k}} - \frac{1}{2^{m-k}}} = \\ &= 2 \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{2^{m-k}}}{1 - \frac{1}{2^{m-k}}} = 4. \end{aligned} \quad (16)$$

Если число контрольных разрядов увеличилось на единицу, справедливо:

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \delta_m &= \lim_{m \rightarrow \infty} 2 \cdot \frac{2^{m+1-(k+1)} - 1}{2^{m-k} - 1} = \\ &= 2 \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{2^{m-k} - 1}{2^{m-k} - 1} = 2. \end{aligned} \quad (17)$$

Для кода Бергера экспериментальными расчетами частично подтверждено свойство 2.

Свойство 3. Отношение числа необнаруживаемых ошибок для кодов Бергера с m и $m+i$ информационными разрядами не зависит от числа контрольных разрядов k и стремится к 2^{2i} при $m \rightarrow \infty$.

Свойства 2 и 3 определяют одинаковые характеристики кодов Бергера и Хэмминга. Сравнивая данные коды по критерию обнаружения ошибок в кодах с m и $m+i$ информационными разрядами, отмечаем их идентичность при $t=0$ для кодов Хэмминга: для обоих классов кодов справедливо значение $\delta_m = 2^{2i}$.

Проанализируем общее число искажений в кодах Бергера и Хэмминга. Обозначим как ϵ_m отношение ошибок в информационных векторах кодов с $m+i$ информационным разрядом в сравнении с кодом с m информационными разрядами. Для любых разде-

лимых кодов величина ε_m одинакова, так как не зависит от числа контрольных разрядов:

$$\varepsilon_m = \frac{2^{m+i}(2^{m+i}-1)}{2^m(2^m-1)} = \frac{2^i(2^{m+i}-1)}{2^m-1}. \quad (18)$$

Возьмем предел ε_m при $m \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \varepsilon_m &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{2^i(2^{m+i}-1)}{2^m-1} = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{2^{m+2i}-2^i}{2^m-1} = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{2^{m+2i}-2^i}{2^m-1} = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{2^m-2^m}{2^m-2^m} = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{4^i - \frac{1}{2^{m-i}}}{1 - \frac{1}{2^m}} = 4^i. \end{aligned} \quad (19)$$

Из (19) следует, что для разделимых кодов, в частности для кодов Бергера и Хэмминга, справедливо такое свойство:

Свойство 4. В коде с $t + i$ информационными разрядами по сравнению с кодом с t информационными разрядами общее число ошибок увеличивается в 4^i раз при $t \rightarrow \infty$.

Для кодов, длины информационных векторов которых различаются на единицу, величина $\varepsilon_m = 4$.

Сравнивая между собой свойства 2, 3 и 4, отметим следующую закономерность, присущую обоим классам кодов.

Свойство 5. При $t \rightarrow \infty$ общее число обнаруживаемых ошибок у кода с $t + i$ информационными разрядами по сравнению с кодом с t информационными разрядами увеличивается во столько же раз, во сколько увеличивается и общее число ошибок в данных кодах.

Заключение

Приведенные здесь свойства кодов Бергера и Хэмминга на практике позволяют разработчику систем функционального контроля делать выбор в пользу более оптимального

технического решения в зависимости от допустимых кратностей возникающих искажений на выходах контролируемого логического устройства. Последнее условие определяется внутренней структурой блока $f(x)$ в системе функционального контроля. Возможность учета ошибок определенной кратности имеется, если есть возможность постановки эксперимента с блоком $f(x)$ подобно тому, как это сделано авторами работы [11].

Коды Бергера можно эффективно использовать в схемах с независимыми и монотонно независимыми выходами, где возможны лишь однонаправленные искажения [12]. Коды Хэмминга имеют приложение в случае, когда невозможны ошибки больших кратностей $d \geq 3$.

Изложенные на страницах данной работы свойства кодов Бергера и Хэмминга являются расширением теории функционального контроля логических устройств без памяти. Вместе с результатами работ [13–15] они позволяют сформировать полные каталоги характеристик помехоустойчивых кодов, применяемых при синтезе контролепригодных логических устройств.

Библиографический список

1. **Error Detection Circuits** / M. Goessel, S. Graf. – L.: Me Graw-Hill, 1994. – 261 p.
2. **Self-checking and Fault-tolerant Digital Design** / P. K. Lala. – University of Arkansas, 2001. – 216 pages.
3. **Logic Synthesis of Multilevel Circuits with Concurrent Error Detection** / N. A. Touba and E. J. McCluskey // IEEE Trans. Computer-Aided Design of Integrated Circuits and System, Vol. 16, Jul. 1997. – Pp. 783–789.
4. **Finite state machine synthesis with concurrent error detection** / C. Zeng, N. Saxena and E. J. McCluskey // Int. Test Conf., Atlantic City, NJ, 1999. – Pp. 672–679.
5. **A note on error detection codes for asymmetric channels** / J. M. Berger // Information and Control. – 1961. – Vol. 4. – Issue 3. – Pp. 68–73.
6. **Error detecting and correcting codes** / R. W. Hamming // Bell System Technical Journal, 1950. – 29 (2). – Pp. 147–160.

7. **О свойствах** кода с суммированием в схемах функционального контроля / Д. В. Ефанов, В. В. Сапожников, Вл. В. Сапожников // Автоматика и телемеханика. – 2010. – № 6. – С. 155–162.

8. **Построение** модифицированного кода Бергера с минимальным числом необнаруживаемых ошибок информационных разрядов / А. А. Блюдов, Д. В. Ефанов, В. В. Сапожников, Вл. В. Сапожников // Электронное моделирование. Т. 34. – 2012. – № 6. – С. 17–29.

9. **Synthesis of Circuits with Low-Cost Concurrent Error Detection Based on Bose-Lin Codes** / D. Das, N. A. Touba // Journal of Electronic Testing: Theory and Applications. – 1999. – Vol. 15. – Issue 1–2 (August-October). – Pp. 145–155.

10. **Предельные** свойства кода с суммированием / В. В. Сапожников, Вл. В. Сапожников, Д. В. Ефанов // Известия Петербургского университета путей сообщения. – 2010. – № 3. – С. 290–299.

11. **The Impact of Logic Optimization of Concurrent Error Detection** / Vl. Moshanin, V. Ocheretnij, and A. Dmitriev // Proc. 4th IEEE International

On-Line Testing Workshop, Capri, Italy, 1998. – Pp. 81–84.

12. **Исследование комбинационных** самопроверяемых устройств с независимыми и монотонно независимыми выходами / М. Гёссель, А. А. Морозов, В. В. Сапожников, Вл. В. Сапожников // Автоматика и телемеханика. – 1997. – № 2. – С. 180–193.

13. **Design of self-testing** checkers for unidirectional error detecting codes / S. J. Piestrak. – Wrocław: Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, 1995. – 111 pages.

14. **Модифицированный код** с суммированием для организации контроля комбинационных схем / А. А. Блюдов, В. В. Сапожников, Вл. В. Сапожников // Автоматика и телемеханика. – 2012. – № 1. – С. 169–177.

15. **Properties of code with summation for logical circuit test organization** / A. Blyudov, D. Efanov, V. Sapozhnikov and Vl. Sapozhnikov // Proc. of 10th IEEE East-West Design&Test Symposium (EWDTS`2012), Kharkov, Ukraine, September 14–17, 2012. – Pp. 114–117.

УДК 504.054

Л. Б. Сватовская

Петербургский государственный университет путей сообщения

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ГЕОЭКОЗАЩИТЫ НА ТРАНСПОРТЕ С УЧЕТОМ Понижения СВОБОДНОЙ ЭНЕРГИИ ГИББСА ПРИ ДЕТОКСИКАЦИИ

Предложены пути обнаружения геоэкозащитных свойств минеральных веществ, которые позволяют им участвовать в детоксикации литосферы в виде минеральных геоантидотов. Прослеживаются параметры, при соблюдении которых возможно проявление детоксикационных свойств от ионов тяжелых металлов при загрязнении литосферы, в том числе и на транспорте.

минеральный геоантидот, вяжущие, детоксикация, термодинамика, гидратационная активность.

Введение

Одной из фундаментальных основ геоэкозащиты на транспорте является геоэкохимия, которая определена нами в [1] как наука о веществах и их превращениях для сбережения литосферы в ее естественном состо-

янии, способствующем сохранению живой природы; ее «введение» в науку состоялось на кафедре «Инженерная химия и естествознание» ПГУПС, где сбережение литосферы от загрязнений, в том числе на транспорте, рассматривается как возможное по крайней мере двумя путями – используя превентив-