

УДК 551.510.535

А. Б. Кондаков

ООО «Рексофт»

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ГЛОБАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ
ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ В ИОНОСФЕРЕ ЗЕМЛИ С УЧЁТОМ
РАЗРЫВОВ В РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПРОВОДИМОСТИ**

Численное моделирование глобального распределения электрического потенциала выполнено при наличии разрывов первого рода в элементах тензора проводимости. Влияние этих разрывов на скорость сходимости исследовано для случаев симметрии и максимальной асимметрии между полушариями в распределении проводимости. Использование вариационно-разностного метода, основанного на концепции обобщенного решения, обеспечило сходимость во всех рассмотренных случаях.

ионосфера, электрический потенциал, моделирование, метод сеток, попеременно-треугольный метод, сходимость.

Введение

В работе [1] была сформулирована постановка задачи глобального распределения электрических полей в ионосфере Земли с корректным учетом специфики электродинамической связи токонесущих ионосферных оболочек противоположных полушарий.

Специфика заключается в следующем. В области средних и низких широт обоих полушарий, по данным измерений, не было обнаружено каких-либо заметных и устойчивых различий в картинах распределения крупномасштабных электрических полей и конвекции ионосферной плазмы, что свидетельствует об эффективном выравнивании электрического потенциала в магнитосопреженных точках противоположных полушарий. В области высоких широт, в северной и южной полярных шапках, эти картины, напротив, могут сильно различаться. Это свидетельствует об отсутствии выравнивания электрического потенциала в магнитосопреженных точках северной и южной полярных шапок, что может быть обусловлено сильным ослаблением электрических полей при их картировании вдоль силовых линий магнитного поля из одной полярной шапки в другую.

В краевой задаче, сформулированной в [1], эта специфика учитывается посредством выделения на сфере трех областей – северной полярной шапки, южной полярной шапки и остальной части сферы с соответствующей постановкой краевых условий на границах областей.

Как отмечалось в [2], данная краевая задача сначала была решена аналитически ценой задания упрощенных распределений параметров задачи, а именно проводимости и продольных токов. Позднее была разработана численная модель, позволяющая учитывать реальное распределение указанных параметров. И, наконец, в работе [3] была представлена модифицированная численная модель, разработанная на основе концепции обобщенного решения. В отличие от версии, изложенной в [2], модифицированная версия модели [3] воспроизводит характерный излом изолиний потенциала на границе тени, где имеет место разрыв производных проводимости.

В настоящей работе в рамках модифицированной модели глобального распределения ионосферных электрических полей [3] исследуется возможность учета разрывов в коэффициентах при старших производных

в эллиптических уравнениях системы, обусловленных резкими границами каналов проводимости в окрестности полярных сияний.

1 Постановка задачи

Согласно [1–3], на проводящей сфере выделены три области – северная Ω_1 и южная Ω_2 шапки с границами Γ_1 и Γ_2 на коширотах θ_1 и $\theta_2 = \pi - \theta_1$ соответственно и вся оставшаяся часть сферы Ω_3 . В отличие от шапок, где магнитные силовые линии разомкнуты и связи по потенциалу нет, в области Ω_3 замкнутые магнитные силовые линии земного диполя эффективно выравнивают электрический потенциал U в сопряженных точках противоположных полушарий. Это позволяет решать уравнение непрерывности интегрального электрического тока J не на всей области Ω_3 , а только на одной ее половине Ω_3^N (для определенности – северной), с границей Γ_1 и экваториальной границей Γ_3 на кошироте θ_3 , используя в уравнении непрерывности в качестве интегральной проводимости Σ и источника сумму интегральных проводимостей и источников в сопряженных точках обоих полушарий. С учетом этого краевая задача имеет вид:

$$\operatorname{div}_{\theta,\varphi} J_1 = j_{1r}'' \text{ для } \Omega_1 (\theta \leq \theta_1); \quad (1)$$

$$\operatorname{div}_{\theta,\varphi} J_2 = j_{2r}'' \text{ для } \Omega_2 (\pi - \theta_1 \leq \theta \leq \pi); \quad (2)$$

$$\operatorname{div}_{\theta,\varphi} J_3 = j_{3r}'' \text{ для } \Omega_3^N (\theta_1 \leq \theta \leq \theta_3); \quad (3)$$

$$U_1 (\theta_1, \varphi) = U_3 (\theta_1, \varphi) = U_2 (\theta_2, \varphi); \quad (4)$$

$$J_{1\theta} (\theta_1, \varphi) - J_{3\theta} (\theta_1, \varphi) = J_{2\theta} (\theta_2, \varphi); \quad (5)$$

$$J_{3\theta} (\theta_3, \varphi) = 0, \quad (6)$$

где U_α, J_α ($\alpha = 1, 2, 3$) – потенциалы и токи в соответствующих областях, связанные законом Ома:

$$J_\alpha = \Sigma_\alpha (-\operatorname{grad} U_\alpha), \quad (7)$$

где Σ – тензор интегральной проводимости:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{\theta\theta} & \Sigma_{\theta\varphi} \\ \Sigma_{\varphi\theta} & \Sigma_{\varphi\varphi} \end{bmatrix}, \quad (8)$$

где $\Sigma_{\theta\theta} = \Sigma_p / \sin^2 \chi$; $\Sigma_{\theta\varphi} = -\Sigma_{\varphi\theta} = \Sigma_H / \sin \chi$; $\Sigma_{\varphi\varphi} = \Sigma_p$; $\sin \chi = 2 \cdot \cos \theta / (1 + 3 \cdot \cos^2 \theta)^{1/2}$; χ – магнитное наклонение; $\operatorname{div}_{\theta,\varphi}$ – угловая часть оператора дивергенции в сферических координатах θ, φ ; j_{ar}'' – источники в виде радиальной составляющей продольных токов; Σ_p и Σ_H зависят от θ и φ .

Условие (4) означает отсутствие скачка потенциала поперек границы данной шапки и между границами противоположных шапок в каждой точке границ. Условие (5) следует из неразрывности общей токовой цепи и означает, что возможные разрывы нормальной компоненты горизонтальных токов на границах северной и южной шапок взаимно компенсируют друг друга за счет продольных токов перетекания на этих границах. Условие (6) – это однородное граничное условие на нормальную компоненту тока. Оно соответствует непротеканию тока через экватор и является единственным физически обоснованным [2].

Краевая задача (1)–(6) для эллиптической системы уравнений в частных производных имеет следующие специфические особенности:

а) разделение сферы на три подобласти, на границе которых определяются краевые условия нелокального характера;

б) несамосопряженность;

в) вырожденность краевой задачи.

Под нелокальным характером граничных условий (4) и (5) понимается наличие в них потенциалов и токов, относящихся к разным полушариям. Особенность (б) обусловлена наличием в тензоре проводимости (8) ненулевой и неоднородной внедиагональной компоненты, определяемой проводимостью Холла. Особенность (в) отражает тот факт, что при отсутствии источников задача (1)–(6) имеет нетривиальное решение $U = \text{const}$.

Параметр θ_1 , определяющий размер и границы шапок, в расчетах принимался равным 27° . Экваториальная граница выбиралась

несколько выше экватора, $\theta_3 = 72^\circ$, с целью избежать проявления особенностей в тензоре проводимости (8) ($\sin \chi = 0$ при $\theta_3 = 90^\circ$).

2 Сходимость итерационного метода для случая разрывных распределений проводимости

В работе [3] глобальное распределение электрических полей воспроизводилось для условий равноденствия. В этом случае некоторые различия в распределении проводимости для северного и южного полушарий обусловлены эффектом мирового времени (UT -эффектом), возникающим из-за несоответствия геомагнитных и географических полюсов Земли, причем при $UT = 04.40$ и 16.40 эти различия максимальны тогда как для $UT = 10.40$ и 22.40 различий нет.

Возникает вопрос, как изменится скорость сходимости при переходе к наиболее тяжелым с вычислительной точки зрения условиям – сильно выраженной межполушарной асимметрии в распределении проводимости, характерной для солнцестояния (значения коэффициентов уравнений (1), (2) в магнито-сопряженных точках могут отличаться в 30 и более раз), с одной стороны, и наличия каналов повышенной проводимости с резкими границами, с другой стороны. Последнее влечет разрыв коэффициентов при старших производных в системе эллиптических уравнений (1) – (3). Это существенно отличается от условий, принятых в [3].

Поскольку обобщенная формулировка краевой задачи (1) – (6) и последующее получение коэффициентов разностной схемы детально изложены в [3], перейдем непосредственно к результатам исследования сходимости. Отметим только, что в настоящей работе система соответствующих итерационных уравнений решалась попеременно-треугольным методом, в отличие от [3], где применялся метод разделения переменных с использованием быстрого преобразования Фурье (БПФ).

Рассмотрены пять вариантов аппроксимации каналов повышенной проводимости,

расположенных зеркально симметрично в северном и южном полушариях, на границах которых проводимость, а следовательно, и коэффициенты при старших производных в уравнениях (1) – (3) имеют разрыв.

Вариант 1. Кольца усиленной проводимости, ограниченные линиями равной кошироты Θ_k и $\Theta_k + \Delta\Theta_k$, с коширотной протяженностью $\Delta\Theta_k = 2^\circ$, вплотную примыкают к границам северной и южной шапок со стороны более низких коширот (т. е. кольца целиком лежат в области Ω_3).

Вариант 2. То же, что и вариант 1, но кольца вплотную примыкают к границам северной и южной шапок со стороны полюсов (т. е. кольца целиком лежат в шапках).

Вариант 3. Кольца протяженностью $\Delta\Theta_k = 3^\circ$, покрывающие границы шапок (т. е. захватывающие и шапки и область Ω_3 одновременно).

Вариант 4. То же, что и вариант 3, но с некоторым нарушением идеальной формы кольца, когда в ограниченном интервале долгот в ночном секторе приполюсные границы колец смещены к полюсам.

Вариант 5. Тета-образное сияние. То же, что и вариант 1. Но при наличии в шапках «перемычек», ориентированных вдоль линии «день – ночь» и смещенных относительно полюсов (аппроксимация каналов проводимости для случая так называемых Θ -сияний).

Численное моделирование глобальных распределений электрических полей с учетом указанных аппроксимаций каналов усиленной проводимости выполнено как для весеннего равноденствия (80-й день года), так и для летнего солнцестояния (170-й день года). Мировое время везде принималось равным $UT = 10.40$. Продольные токи (правые части уравнений (1) – (3)) задавались аналогично [3] в предположении, что магнитосфера является источником «напряжения». Выбиралась сетка с шагом $0,5^\circ$ по кошироте и шагом $360^\circ/80$ по долготе.

Как отмечалось выше, в условиях равноденствия при $UT = 10.40$ имеет место зеркальная симметрия в распределении проводимости и продольных токов, определяющих коэффициенты и правые части уравнений

(1) – (3). Соответствующие этим граничным условиям параметры сходимости приведены в табл. 1 и 2 для $\beta = 5$ и $\beta = 10$. Здесь β – коэффициент усиления проводимости, показывающий, во сколько раз проводимость внутри каналов (усиленной проводимости) превышает фоновую.

Как видно из табл. 1, которой соответствует значение $\beta = 5$, число итераций, обеспечивающих требуемую точность, для вариантов 1–4 почти одинаково. Другими словами, число итераций практически не зависит от того, где локализованы каналы усиленной проводимости – в шапках (области Ω_1 и Ω_2), вне шапок (область Ω_3) или накрывают границу шапок, находясь одновременно в областях $\Omega_{1,2}$ и Ω_3 . Однако для варианта 5 (случай Θ -сияний) число итераций заметно возросло – примерно в 1,3 раза.

Для $\beta = 10$, как видно из табл. 2, имеют место точно такие же закономерности – практически одинаковое число итераций для

вариантов 1–4 и рост числа итераций для варианта 5, в данном случае в 2 раза.

Особенностью варианта 5 в сравнении с вариантами 1–4 является Θ -образная форма каналов проводимости, содержащая вытянутые вдоль линии «день – ночь» «перемычки» в шапках (области Ω_1 и Ω_2). Если форма кольца является «дружественной» для используемой двумерной сетки, то форма «перемычки», наоборот, является «недружественной». Именно это обстоятельство и является причиной установленного замедления сходимости для варианта 5. Как отмечено выше, увеличение числа итераций, по сравнению с вариантами 1–4, для $\beta = 5$ и $\beta = 10$ составили факторы 1,3 и 2,0 соответственно. Это свидетельствует о возрастании роли конфликта между конфигурацией сетки и конфигурацией Θ -каналов с ростом разрывов проводимости на границах каналов.

Наоборот, рост β никак не сказывается на сходимости для вариантов 1–4, как это видно

ТАБЛИЦА 1. Сходимость метода для 80-го дня, $\beta = 5$

Задача	Оптимальные параметры попеременно-треугольного метода	Погрешность на 2000-й итерации	Погрешность на 5000-й итерации	Всего итераций
1	$\omega = 10^{-5}, \tau = 3 \cdot 10^{-5}$	0,35	0,00034	8600
2	$\omega = 10^{-5}, \tau = 3 \cdot 10^{-5}$	0,34	0,00039	9100
3	$\omega = 10^{-5}, \tau = 3 \cdot 10^{-5}$	0,35	0,00037	8900
4	$\omega = 10^{-5}, \tau = 3 \cdot 10^{-5}$	0,35	0,00034	8500
5	$\omega = 10^{-5}, \tau = 2 \cdot 10^{-5}$	1,26	0,0054	11000

ТАБЛИЦА 2. Сходимость метода для 80-го дня, $\beta = 10$

Задача	Оптимальные параметры	Погрешность на 2000-й итерации	Погрешность на 5000-й итерации	Всего итераций
1	$\omega = 10^{-5}, \tau = 3 \cdot 10^{-5}$	0,26	0,00033	8500
2	$\omega = 10^{-5}, \tau = 3 \cdot 10^{-5}$	0,34	0,00039	9100
3	$\omega = 10^{-5}, \tau = 3 \cdot 10^{-5}$	0,34	0,00037	8800
4	$\omega = 10^{-5}, \tau = 3 \cdot 10^{-5}$	0,35	0,00033	8400
5	$\omega = 4 \cdot 10^{-6}, \tau = 7 \cdot 10^{-6}$	0,080	0,00047	16700

из сопоставления таблиц 1 и 2. Причиной этого является органичность конфигураций сетки и кольцеобразных каналов.

При сравнении таблиц 1 и 2 обнаруживается ещё одна особенность. Для кольцеобразных каналов (варианты 1–4) число итераций при $\beta = 5$ и $\beta = 10$ одинаково (для $\beta = 10$ оно даже чуть меньше). Напротив, для Θ -каналов (вариант 5) число итераций возросло в 1,5 раза при переходе от $\beta = 5$ к $\beta = 10$, т. е. при увеличении проводимости в каналах в 2 раза (очередное проявление конфликта между конфигурациями Θ -каналов и сетки).

Напомним, что результаты в табл. 1 и 2 соответствуют случаю зеркальной симметрии в пространственном распределении параметров системы уравнений (1) – (3), что обусловлено используемыми условиями – равенство (день года 80-й) и $UT = 10.40$. Как показывают расчеты, нарушение указанной симметрии за счет изменения момента мирового времени UT приводит к замедлению сходимости.

Куда более значительное замедление сходимости происходит при максимально выраженной асимметрии, а именно в условиях солнцестояния. Действительно, данные табл. 3 свидетельствуют о сильном снижении скорости сходимости.

Из сопоставления таблиц 3 и 2, соответствующих одинаковому значению $\beta = 10$, следует, что при переходе от равноденствия к солнцестоянию (170-й день (лето в северном полушарии, зима – в южном)) число итера-

ций возросло: для варианта 1 – в 9,0 раз, для варианта 2 – в 8,6 раза, для варианта 3 – в 8,8 раза, для варианта 4 – в 9,1 раза и чуть больше для Θ -каналов (варианта 5) – в 10,4 раза.

Как влияет на сходимость конфигурация каналов в этих новых условиях солнцестояния? Как и в рассмотренных выше условиях, число итераций для вариантов 1–4 практически одинаково, а для Θ -каналов (вариант 5) число итераций в 2,3 раза больше, что близко к фактору 2,0 для равноденствия.

Заключение

Как и следовало ожидать, сходимости удалось достичь во всех рассмотренных случаях, что свидетельствует, в частности, о преимуществах используемого нами вариационно-разностного метода [3], основанного на концепции обобщенного решения, по сравнению с обычным конечно-разностным методом, описанным в [2].

Доступная в настоящее время вычислительная техника позволяет решать задачи моделирования глобального распределения электрических полей при учете специфических локальных особенностей в распределении параметров задачи за счет учащения сетки. В то же время попытка моделировать сильно локализованные возмущения, находящиеся внутри подобласти размером несколько градусов по кошироте и долготе, с использованием равномерной сетки, привела

ТАБЛИЦА 3. Сходимость метода для 170-го дня, $\beta = 10$

Задача	Оптимальные параметры	Погрешность на 5000-й итерации	Погрешность на 20 000-й итерации	Погрешность на 50 000-й итерации	Всего итераций
1	$\omega = 10^{-5}, \tau = 3 \cdot 10^{-5}$	175,4	3,48	0,00083	76 800
2	$\omega = 10^{-5}, \tau = 3 \cdot 10^{-5}$	128,06	0,95	0,0012	78 000
3	$\omega = 10^{-5}, \tau = 3 \cdot 10^{-5}$	175,47	4,00	0,0010	77 200
4	$\omega = 10^{-5}, \tau = 3 \cdot 10^{-5}$	172,95	3,43	0,00082	76 700
5	$\omega = 4 \cdot 10^{-6}, \tau = 7 \cdot 10^{-6}$	48,54	1,94	0,0020	173 000

бы к необходимости участить сетку минимум в пять раз, что сделает процедуру расчета непозволительно долгой. Поэтому сильно локализованные возмущения следует моделировать на основе отдельной краевой задачи для подобласти, заимствуя граничные условия из глобальной задачи.

Библиографический список

1. **Возможный** подход к проблеме возбуждения электрических полей и токов, обуслов-

ленных B_y -компонентой ММП / В. М. Уваров // Геомагнетизм и аэрономия. – 1981. – № 1. Т. 21. – С. 114–120.

2. **Электрические** поля в ионосфере Земли. Численные модели / В. М. Уваров, Б. А. Самокиш. – Санкт-Петербург : Петербургский гос. ун-т путей сообщения, 2009. – 63 с.

3. **Модифицированная** численная модель глобального распределения электрического потенциала. УТ-эффект обращения ионосферной конвекции / А. Б. Кондаков, Б. А. Самокиш, В. М. Уваров // Геомагнетизм и аэрономия. – 1999. – № 6. Т. 39. – С. 50–55.

УДК 609.6(075.8)

С. Г. Подклетнов

Петербургский государственный университет путей сообщения

АВТОМАТИЗИРОВАННОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ С ПОМОЩЬЮ ЯЗЫКА AUTOLISP

Показана возможность применения языка AutoLISP для создания параметрических чертежей в AutoCAD. Рассмотрены основные понятия и области применения широко известного языка программирования AutoLISP, используемого в инженерных расчетах, позволяющего разрабатывать макропрограммы и функции, хорошо сочетающегося с прикладной графикой AutoCAD. Приведен текст программы для создания блока построения чертежа параметрической детали. Сделан вывод о возможности применения данного языка для создания параметрических чертежей уже более сложных моделей.

автоматизированное проектирование, язык AutoLISP, параметрические чертежи.

Введение

Особого внимания среди CAD-систем заслуживает программный комплекс *AutoCAD*. Эта система автоматизированного проектирования не только предоставляет пользователю удобный графический интерфейс и обеспечивает получение высококачественной графики, но и располагает широким набором инструментов программирования.

К средствам программирования *AutoCAD* относятся следующие языки: *AutoLISP*, *Visual C++*, *Visual Basic for Application (VBA, ARX, DCL)* [1, 2, 3, 4]. Будучи частью *AutoCAD*,

AutoLISP позволяет оперировать переменными различных типов и передавать их значения командам *AutoCAD* при вводе данных. При ответах на запросы команд *AutoCAD* существует возможность использования выражений *AutoLISP*, в которых могут выполняться различные арифметические и условные операции с числовыми значениями и значениями определенных переменных.

Возможности, которые обеспечивает *AutoLISP*:

– использование переменных и выражений при ответах на запросы команд *AutoCAD*;