

зданий / Г. М. Борликов, Э. В. Арина. – Новочеркасск, 1969.

2. **Деформации** модельных и натурных резервуаров на слабых грунтах / Р. А. Усманов // Нефтепромысловое строительство. – 1982. – № 5. – С. 5–7.

3. **Расчет** оснований зданий и сооружений в упруго-пластической стадии работы с применением ЭВМ / Ю. Н. Мурзенко. – Ленинград : Стройиздат, Ленингр. отделение, 1989. – 135 с.

4. **Расчет** оснований гидротехнических сооружений / В. А. Флорин. – Москва : Госстройиздат, 1948. – 188 с.

5. **Прочность** оснований и устойчивость гидротехнических сооружений на мягких грунтах /

П. Д. Евдокимов. – Москва : Госэнергоиздат, 1956. – 271 с.

6. **Решение** задачи предельного равновесия с использованием метода конечных элементов / К. Г. Шашкин, В. А. Шашкин, М. В. Дунаева // Развитие городов и геотехническое строительство. – 2011. – № 13. – С. 81–95.

7. **Условия** моделирования напряженно-деформированного состояния сыпучей среды под жестким штампом. Исследование оснований, фундаментов и гидротехнических сооружений: Труды НПИ. Т. 216. – Новочеркасск, 1970. – С. 12–22.

8. **Механика** грунтов / Н. А. Цытович. – Москва : Госстройиздат, 1963. – 636 с.

УДК 624.04

Б. М. Аллахвердов, К. Ю. Полинкевич

Петербургский государственный университет путей сообщения
Императора Александра I

ИТЕРАЦИОННЫЙ СПОСОБ РАСЧЕТА АНИЗОТРОПНОЙ БАЛКИ НА ПРОЧНОСТЬ

Предложено описание методики расчета анизотропных балок на прочность, основанной на итерационном способе последовательного удовлетворения условиям равновесия и совместности деформаций. На численном примере приведены результаты, и оценена их близость к решению, полученному точным аналитическим способом. Определены упругие постоянные анизотропного материала в зависимости от направления армирования связующего вещества. Даны характеристики современного углепластика и очерчена область его применения.

теория упругости, анизотропия, ортотропная балка, метод итераций, напряжения, деформации.

Введение

В работе рассмотрена возможность применения итерационного способа расчета на прочность к анизотропным балкам. Рассмотрен простейший расчет балка на двух опорах, имеющий точное аналитическое решение. Приведено сравнение результатов.

1 Закон Гука для анизотропных материалов

Считая, как это принято в сопротивлении материалов, что при малых деформациях зависимость между деформациями и напряжениями соответствует линейному закону, запишем в общем случае анизотропии обобщенный закон Гука [1]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x = & a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{13}\sigma_z + \\ & + a_{14}\tau_{yz} + a_{15}\tau_{xz} + a_{16}\tau_{xy} \\ & \dots\dots\dots \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} = & a_{61}\sigma_x + a_{62}\sigma_y + a_{63}\sigma_z + \\ & + a_{64}\tau_{yz} + a_{65}\tau_{xz} + a_{66}\tau_{xy}. \end{aligned}$$

Здесь $a_{11}, a_{12} \dots a_{66}$ – упругие постоянные анизотропного материала. В общем случае число различных постоянных равно 21.

В случае плоского напряженного состояния, когда отсутствуют все напряжения на площадке с нормалью по оси z и ортогональные оси x_1, y_1 повернуты относительно главных осей x, y на некоторый угол α , зависимость (1) принимает вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x1} = & \frac{1}{E_{x1}}\sigma_{x1} - \frac{\nu_{y1x1}}{E_{y1}}\sigma_{y1} + \frac{\eta_{1\tau}}{G_{x1y1}}\tau_{x1y1}; \\ \varepsilon_{y1} = & -\frac{\nu_{x1y1}}{E_{x1}}\sigma_{x1} + \frac{1}{E_{y1}}\sigma_{y1} + \frac{\eta_{2\tau}}{G_{x1y1}}\tau_{x1y1}; \quad (2) \end{aligned}$$

$$\gamma_{x1y1} = \frac{\eta_{1\sigma}}{E_{x1}}\sigma_{x1} + \frac{\eta_{2\sigma}}{E_{y1}}\sigma_{y1} + \frac{1}{G_{x1y1}}\tau_{x1y1},$$

здесь $\varepsilon_{x1}, \varepsilon_{y1}$ – относительные удлинения (линейные деформации) в направлении действия нормальных напряжений; γ_{x1y1} – относительный сдвиг (сдвиговая деформация) или величина изменения прямого угла между площадками, на которых действуют соответствующие касательные напряжения; E_{x1}, E_{y1}, G_{x1y1} – модули упругости и сдвига соответственно; $\nu_{i1,j1}$ – коэффициенты влияния линейной деформации по направлению $i1$ на линейную деформацию по направлению $j1$, $\eta_{i\sigma}$ – коэффициенты влияния линейной деформации на сдвиговую деформацию по направлению i ; $\eta_{i\tau}$ – коэффициенты влияния сдвиговой деформации на линейную деформацию по направлению i , при этом соблюдаются отношения:

$$\begin{aligned} \frac{\nu_{y1x1}}{E_{y1}} = \frac{\nu_{x1y1}}{E_{x1}}, \quad \frac{\eta_{1\sigma}}{E_{x1}} = \frac{\eta_{1\tau}}{G_{x1y1}}; \\ \frac{\eta_{2\sigma}}{E_{y1}} = \frac{\eta_{2\tau}}{G_{x1y1}}. \end{aligned} \quad (3)$$

Приведенные зависимости показывают, что в анизотропных материалах нормальные напряжения вызывают не только продольные, но и сдвиговые деформации, а касательные напряжения могут быть причиной не только появления сдвигов, но и продольных деформаций.

При изучении плоского напряженного состояния анизотропной балки часто можно встретиться с такой задачей: известны упругие постоянные для некоторой системы координат x, y и требуется найти упругие постоянные для новой системы $x1, y1$, повернутой по отношению к первой на угол α . Для ортотропной балки обычно задаются главные упругие постоянные, однако может оказаться, что пользоваться главной системой координат почему-либо неудобно, и придется производить пересчет упругих постоянных. Модули и коэффициенты для новых осей определяются по формулам [2]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{E_{x1}} = & \frac{\cos^4 \alpha}{E_1} + \\ & + \left(\frac{1}{G} - \frac{2\nu_1}{E_1} \right) \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha + \frac{\sin^4 \alpha}{E_2}; \\ \frac{1}{E_{y1}} = & \frac{\sin^4 \alpha}{E_1} + \\ & + \left(\frac{1}{G} - \frac{2\nu_1}{E_1} \right) \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha + \frac{\cos^4 \alpha}{E_2}; \quad (4) \\ \frac{1}{G_{x1y1}} = & \frac{1}{G} + \left(\frac{1+\nu_1}{E_1} + \frac{1+\nu_2}{E_2} - \frac{1}{G} \right) \sin^2 2\alpha; \\ \nu_{y1} = & E_{x1} \left[\frac{\nu_1}{E_1} - \frac{1}{4} \left(\frac{1+\nu_1}{E_1} + \frac{1+\nu_2}{E_2} - \frac{1}{G} \right) \sin^2 2\alpha \right] \\ \nu_{x1} = & \nu_{y1} \frac{E_{x1}}{E_{y1}}; \end{aligned}$$

$$\eta_{1\sigma} = E_{x1} \times \left[\frac{\sin^2 \alpha}{E_2} - \frac{\cos^2 \alpha}{E_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{G} - \frac{2\nu_1}{E_1} \right) \cos 2\alpha \right] \sin 2\alpha;$$

$$\eta_{2\sigma} = E_{y1} \times \left[\frac{\cos^2 \alpha}{E_2} - \frac{\sin^2 \alpha}{E_1} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{G} - \frac{2\nu_1}{E_1} \right) \cos 2\alpha \right] \sin 2\alpha.$$

2 Выбор актуального материала для численных расчетов

В настоящее время углепластики являются основным классом материалов для вновь создаваемых или модернизируемых летательных аппаратов. Ведущие авиастроительные предприятия, такие как «Боинг» и «Эйрбас», являются основными покупателями углеволокон. Фюзеляжи современных самолетов состоят более чем на 50 % из композитов. Углепластики имеют высокие показатели прочности и жесткости. В дальнейших расчетах предлагается рассмотреть в качестве примера углепластик марки М60J/Ероху [5], который имеет следующие характеристики относительно главных направлений, связанных с расположением волокон:

$E_1 = 33,0 \cdot 10^4$ МПа – вдоль волокон;
 $E_2 = 0,5886 \cdot 10^4$ МПа – поперек волокон;
 $\nu_1 = 0,32$; $G_{12} = 0,3924 \cdot 10^4$ МПа.

При повороте осей эти упругие постоянные изменяются по (4).

На рис. 1 показаны графики зависимости модуля упругости и модуля сдвига от угла поворота.

3 Итерационный способ расчета анизотропной балки на прочность

Предлагается применить к решению задач исследования напряженного состояния анизотропных стержней итерационный алгоритм уточнения компонент напряжений. Использование итерационного способа расчета НДС для изотропных и многослойных балок с целью уточнения значения напряжений при учете сдвиговых и поперечных деформаций рассматривалось в [3] и [4].

Далее описывается процедура итерационного процесса. Она анализируется на конкретном примере.

Рассматривается анизотропная балка длиной L , высотой h и шириной b на двух шарнирных опорах (рис. 2), загруженная постоянной равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q .

Для численных расчетов принимаются следующие значения:

$$L = 3 \text{ м}; h = 0,6 \text{ м}; b = 0,1 \text{ м}; \\ q = 10 \text{ т}; \alpha = 30^\circ.$$

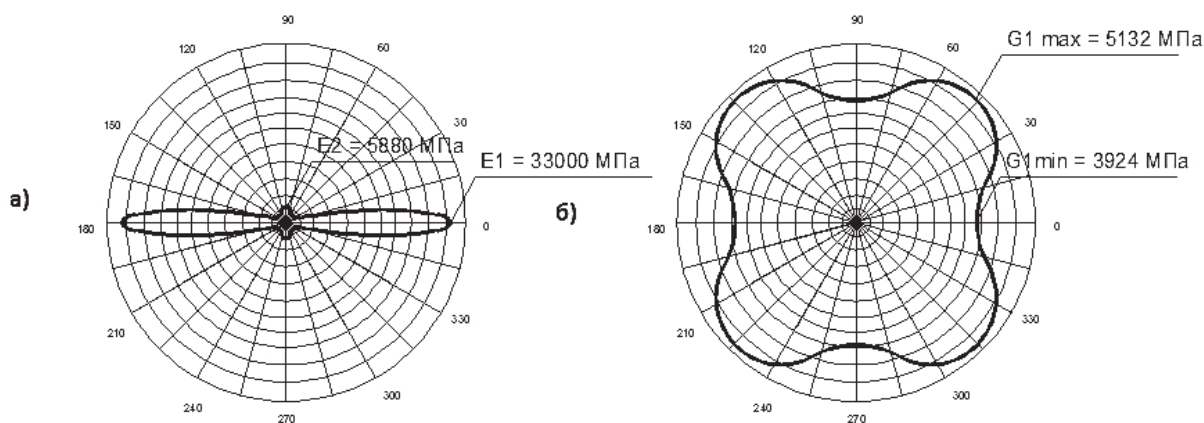


Рис. 1. Полярные диаграммы изменения модулей: а) продольной упругости; б) сдвига при повороте координатных осей для углепластика М60J/Ероху

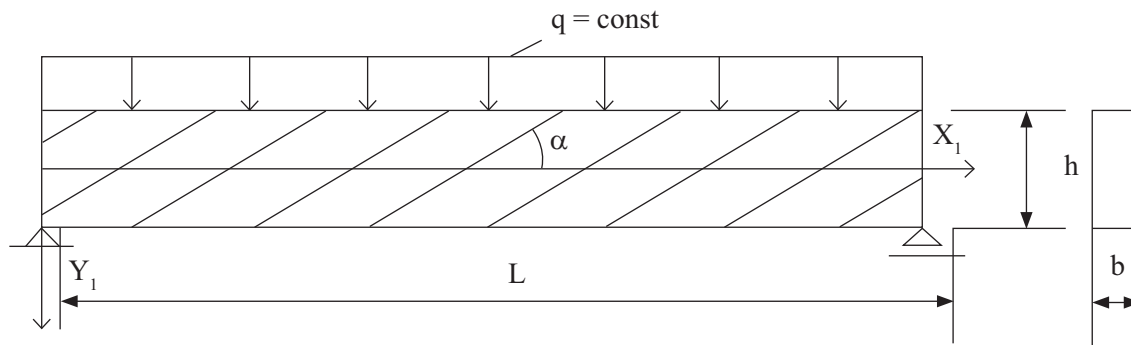


Рис. 2. Расчетная схема с указанием принятых осей координат и направлением главных осей армирования

В поставленной задаче направление оси X_1 балки и направление главных осей армирования пластика углеродистыми волокнами отличаются на угол $\alpha = 30^\circ$, потому в соответствии с формулой (4) определено значение упругих постоянных:

$$\begin{aligned} E_{x1} &= 16739,0 \text{ МПа}; E_{y1} = 6984,7 \text{ МПа}; \\ G_{x1y1} &= 5131,9 \text{ МПа}; \nu_{x1} = 0,26725; \\ \nu_{y1} &= 0,11152; \eta_{1\sigma} = 1,4993; \eta_{2\sigma} = 0,38373. \end{aligned}$$

В данном примере функции изгибающего момента $M(x) = \frac{qx}{2}(L-x)$ и продольной силы $N(x) = 0$ известны заранее.

1. Первая итерация.

1.1. Примем, что деформации $\varepsilon_y(x, y)$ и $\gamma(x, y)$ равны нулю.

1.2. Основываясь на гипотезе плоских сечений, деформацию ε_x задаем в виде:

$$\varepsilon_x(x, y) = \varepsilon_0(x) + \chi(x) \cdot y, \quad (5)$$

где $\varepsilon_0(x)$ и $\chi(x)$ – неизвестные функции ($\varepsilon_0(x)$ можно трактовать как продольную деформацию оси стержня, а $\chi(x)$ – как кривизну его оси).

1.3. Зная деформации, по линейному закону Гука для изотропных материалов можно перейти к нормальным напряжениям вдоль оси x :

$$\begin{aligned} \sigma_x(x, y) &= E_{x1} \cdot \varepsilon_x(x, y) = \\ &= E_{x1}(\varepsilon_0(x) + \chi(x) \cdot y). \end{aligned} \quad (6)$$

1.4. Из условий равновесия находим значения функций $\varepsilon_0(x)$ и $\chi(x)$:

$$\begin{aligned} N(x) &= \int_A \sigma_x(x, y) dA = \\ &= E_{x1} b \int_{-h/2}^{h/2} (\varepsilon_0(x) + \chi(x) \cdot y) dy = \\ &= E_{x1} b \cdot \varepsilon_0(x) \cdot h = 0 \rightarrow \varepsilon_0(x) = 0; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} M(x) &= \int_A (\sigma_x(x, y) \cdot y) dA = \\ &= E_{x1} b \int_{-h/2}^{h/2} (\varepsilon_0(x) + \chi(x) \cdot y) \cdot y \cdot dy = \\ &= E_{x1} b \cdot \frac{h^3}{12} \chi(x) \rightarrow \chi(x) = \frac{M(x)}{E_{x1} \cdot J_{x1}}; \end{aligned} \quad (8)$$

здесь $J_{x1} = b \cdot \frac{h^3}{12}$.

Формула для нормальных напряжений теперь выглядит так, как в сопротивлении изотропных материалов:

$$\sigma_x(x, y) = \frac{M(x) \cdot y}{J_{x1}}. \quad (9)$$

1.5. Теперь, зная функцию нормальных напряжений, из дифференциального уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_x(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}(x, y)}{\partial y} = 0 \quad (10)$$

можем найти выражение для касательных напряжений с точностью до произвольной функции $\tau_0(x)$:

$$\begin{aligned}\tau_{yx}(x, y) &= \\ &= -\int \frac{\partial \sigma_x(x, y)}{\partial x} \cdot dy + \tau_0(x) = \\ &= -\int \frac{dM(x)}{dx \cdot J_{x1}} y dy + \tau_0(x) = \\ &= -\frac{Q(x)}{J_{x1}} \frac{y^2}{2} + \tau_0(x). \\ \text{Здесь } Q(x) &= \frac{dM(x)}{dx}.\end{aligned}\quad (11)$$

1.6. Зная, что вдоль нижних волокон ($y = \frac{h}{2}$) касательные напряжения отсутствуют:

$$\begin{aligned}-\frac{6Q(x)}{bh^3} y^2 + \tau_0(x) &= \\ = 0 \rightarrow \tau_0(x) &= \frac{3}{2} \frac{Q(x)}{A} \\ \text{и } \tau(x, y) &= \frac{3}{2} \frac{Q(x)}{A} \left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right). \\ \text{Здесь } A &= bh.\end{aligned}\quad (12)$$

1.7. Аналогично из второго уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_y(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}(x, y)}{\partial x} = 0 \quad (13)$$

находим значение функции σ_y с точностью до произвольной функции $\sigma_{y0}(x)$:

$$\begin{aligned}\sigma_y(x, y) &= -\int \frac{\partial \tau_{yx}(x, y)}{\partial x} \cdot dy + \sigma_{y0}(x) = \\ &= -\int \frac{3 \cdot dQ(x)}{2 \cdot A \cdot dx} \left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right) dy + \sigma_{y0}(x) = \\ &= \frac{3 \cdot q(x)}{2A} y \left(1 - \frac{4y^2}{3h^2}\right) + \sigma_{y0}(x). \\ \text{Здесь } q(x) &= -\frac{dQ(x)}{dx}.\end{aligned}\quad (14)$$

1.8. Напряжения $\sigma_y(x, y)$ вдоль нижних волокон ($y = \frac{h}{2}$) отсутствуют:

$$\begin{aligned}\frac{3q(x)}{2A} \frac{h}{2} \left(1 - \frac{h^2}{3h^2}\right) + \sigma_{y0}(x) &= \\ = 0 \rightarrow \sigma_{y0}(x) &= -\frac{q(x)}{2 \cdot b} \\ \text{и } \sigma_y(x, y) &= \frac{3q(x)}{2A} y \left(1 - \frac{4y^2}{3h^2}\right) - \\ - \frac{q(x)}{2b} &= \frac{q(x)}{2b} \left(3 \frac{y}{h} + \frac{4y^3}{h^3} - 1\right).\end{aligned}\quad (15)$$

Нахождением напряжений как функций двух переменных заканчивается первый цикл итерационного процесса. Этот шаг полностью описывает поведение стержня в рамках классического сопротивления материалов.

2. Вторая итерация.

2.1. В начале второго цикла по закону Гука (3) для анизотропного тела находим функцию деформаций вдоль оси $y - \varepsilon_y$:

$$\begin{aligned}\varepsilon_y(x, y) &= -\frac{v_{x1y1}}{E_{x1}} \sigma_x(x, y) + \\ &+ \frac{1}{E_{y1}} \sigma_y(x, y) + \frac{\eta_{2\sigma}}{E_{y1}} \tau_{yx}(x, y).\end{aligned}\quad (16)$$

2.2. Зная функцию деформации $\varepsilon_y(x, y)$, можно найти соответствующую функцию перемещения $V(x, y)$, пользуясь уравнением связи между деформациями и перемещениями:

$$\begin{aligned}V(x, y) &= \\ &= \int \varepsilon_y(x, y) \cdot dy + V_0(x),\end{aligned}\quad (17)$$

с точностью до произвольной функции $V_0(x)$.

2.3. Далее определяем функцию деформации сдвига по обобщенному закону Гука (3):

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} = & \frac{\eta_{1\sigma}}{E_{x1}} \sigma_x(x, y) + \\ & + \frac{\eta_{2\sigma}}{E_{y1}} \sigma_y(x, y) + \frac{1}{G_{x1y1}} \tau_{yx}(x, y). \end{aligned} \quad (18)$$

2.4. Затем вновь находим функцию продольных деформаций $\varepsilon_x(x, y)$:

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}; \\ \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} &= \frac{\partial W}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}; \\ \varepsilon_x(x, y) &= \frac{\partial W}{\partial x} = \\ &= \int \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} dy - \int \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dy + \varepsilon_0(x) - \\ &\quad - V_0''(x) \cdot x, \end{aligned} \quad (19)$$

но это уже не та линейная функция, с которой начинался первый цикл вычислений.

Учитывая, что при малости углов поворота $V_0''(x) \approx -\chi(x)$, получаем схожую с первым циклом задачу определения новых функций $\varepsilon_0(x)$ и $\chi(x)$. Эти функции, также как и в первом цикле, находятся из условия равновесия.

2.5. Зная деформации, теперь уже по обобщенному закону Гука для анизотропных тел можно определить нормальные напряжения $\sigma_x(x, y)$ во втором цикле:

$$\begin{aligned} \sigma_x(x, y) &= \varepsilon_x(x, y) \cdot E_{x1} + \\ &+ \nu_{x1} \cdot \sigma_y(x, y) - \eta_{1\sigma} \cdot \tau_{yx}(x, y). \end{aligned} \quad (20)$$

Дальнейшие процедуры также повторяются.

Результаты численного расчета по предложенному алгоритму итерационного уточнения напряженного состояния для анизотропных стержней приведены далее.

4 Точное аналитическое решение

Точное аналитическое решение (21) получено с использованием функции Эри (Airy) и приведено в [2]. Нормальные продольные и касательные напряжения в сечении определяются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \sigma_x = & \frac{q}{2I} (l^2 - z^2) \cdot y + \\ & + \frac{q}{b} \left[\begin{aligned} & - \frac{a_{16}}{a_{11}} \cdot \frac{x}{h} \left(1 - 12 \frac{y^2}{h^2} \right) + \\ & + 2 \left(\frac{2a_{12} + a_{66}}{4a_{11}} - \frac{a_{16}^2}{a_{11}^2} \right) \cdot \left(\frac{4y^3}{h^3} - \frac{3y}{5h} \right) \end{aligned} \right]; \end{aligned} \quad (21)$$

$$\tau = \frac{q \cdot Z}{2J_{x1}} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - Y^2 \right) - \frac{q}{b} \cdot \frac{a_{16}}{a_{11}} \cdot \left(\frac{Y}{h} - \frac{4Y^3}{h^3} \right),$$

где $l = \frac{L}{2}$; $J_{x1} = \frac{bh^3}{12}$; $a_{11} = \frac{1}{E_{x1}}$; $a_{12} = \frac{\nu_{x1}}{E_{x1}}$;

$$a_{16} = \frac{\eta_{1\sigma}}{E_{x1}}.$$

5 Сравнение результатов

В таблице приведены значения нормальных и касательных напряжений в трех точках по высоте сечения в четверти пролета

ТАБЛИЦА. Нормальные напряжения (т/м²)

Сечение	Итерационный способ						Аналитический метод	
	Цикл 1		Цикл 2		Цикл 3			
	σ	τ	σ	τ	σ	τ	σ	τ
Верхняя фибра	−1406,25	0	−1058,68	0	−968,49	0	−979,48	0
Центр сечения	0	187,50	−187,41	187,50	−187,41	187,49	−187,41	187,50
Нижняя фибра	1406,25	0	1808,35	0	1718,40	0	1729,12	0

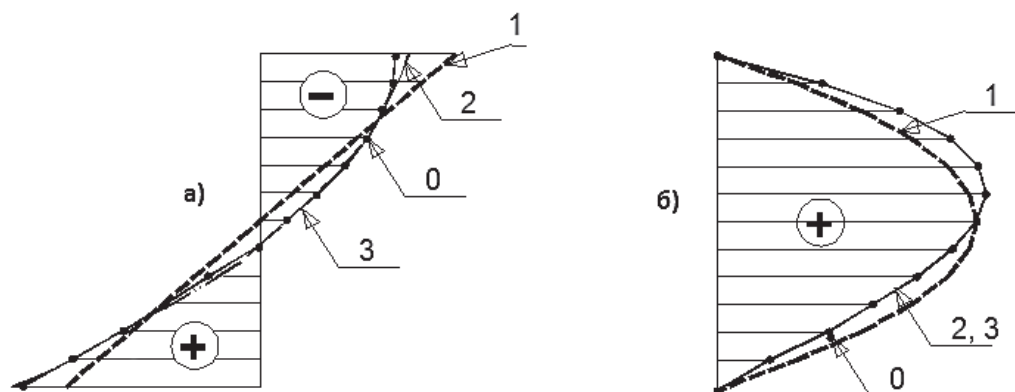


Рис. 3. Эпюры нормальных (а) и касательных (б) напряжений по высоте балки.
1 – первая итерация; 2 – вторая итерация; 3 – третья итерация; 0 – аналитическое решение

балки. На рис. 3 определенным двумя различными способами по численным данным построены эпюры напряжений по высоте балки в том же сечении. Очевидна сходимость результатов итерационного способа к точному решению уже на третьем цикле.

Заключение

1. В среде MathCAD был реализован алгоритм расчета анизотропных балок на прочность, основанный на итерационном способе последовательного удовлетворения условиям равновесия и совместности деформаций. По данному алгоритму решена задача.

2. Та же задача решена точным аналитическим методом.

3. Приведено сравнение напряженного состояния конкретной анизотропной балки, определенного вышеизложенным способом, с аналитическим, полученным с использованием функции Эри. После трех циклов итерации предложенное решение практически не отличается от точного, полученного

методами теории упругости анизотропного тела.

Библиографический список

1. **Теория** анизотропных пластин (прочность, устойчивость и колебания) / С. А. Амбарцумян. – Москва : Наука, 1967. – 268 с.
2. **Анизотропные** пластинки / С. Г. Лехницкий. – Москва : Гос. изд-во техн.-теор. литературы, 1957. – 463 с.
3. **Итерационный** метод расчета балок с изменяющимися по высоте характеристиками. Исследования по механике материалов и конструкций (сб. научн. статей) / Б. М. Аллахвердов. – 2002. – Вып. 12. – С. 30–34.
4. **Итерационный** способ расчета слоистых балок на прочность / К. Ю. Полинкевич // Известия ПГУПС. – 2013. – Вып. 2 (35). – С. 148–153.
5. **Анализ** оптимальных сочетаний требований к разрабатываемым углепластикам для крупногабаритных ракетно-космических конструкций / А. А. Смердов, И. А. Буянов, И. В. Чуднов // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. – 2012. – Вып. 8. – С. 70–77.