ОБЩЕТЕХНИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ И ПУТИ ИХ РЕШЕНИЯ

УДК 531.01

Л. К. Бабаджанянц, И. Ю. Потоцкая, Ю. Ю. Пупышева
Санкт-Петербургский государственный университет

УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ СИСТЕМАМИ ПО КРИТЕРИЮ РАСХОДА

Предлагаются методы нахождения оптимального управления в виде явной функции времени в постановках, где требуется погасить одну или несколько частотных компонент решения автономной линейной системы. В качестве минимизируемого функционала рассматривается «расход топлива» на классе кусочно-постоянных управлений с конечным фиксированным числом импульсов. Сформулированные в статье теоремы позволяют найти точки переключения упомянутых управлений либо в явной форме, либо с помощью численных методов.

управление линейными системами, оптимальное по расходу управление, кусочно-постоянное управление.

Введение

Оптимизация «по расходу» естественна в тех задачах, где требуется удерживать механическую или иную систему в окрестности положения равновесия в течение длительного времени. Возмущающие факторы время от времени отклоняют эту систему недопустимо далеко от положения равновесия и каждый раз требуется гасить эти отклонения, расходуя на это топливо или другие ограниченные ресурсы. Пока отклонения от положения равновесия малы, её управляемое движение можно моделировать автономными линейными дифференциальными уравнениями с управлением.

1 Постановка задачи оптимального управления по расходу

Предлагаемые в настоящей работе постановка и методы получены как обобщение на линейный случай произвольной размерности результатов Л. К. Бабаджанянца, Н. И. Голубевой и В. С. Новосёлова [1, 2] для задачи о гашении колебаний около центра масс спутника с быстрозакрученным маховиком.

Рассмотрим механическую или иную модель с управлением, описываемую уравнением

$$\frac{dx}{dt} = Ax + U(t) \qquad (1.1)$$

относительно вектор-функции $x(t) = (x_1, ..., x_n) \in R^n$ аргумента t при начальном условии

$$x(0) = x_0, \qquad (1.2)$$

где $x_0 = (x_{1_0}, ..., x_{n_0}) \in R^n$; $U(t) = (u_1, ..., u_n) \in R^n$; A – постоянная матрица размерности $(n \times n)$.

Компоненты u_i управления $U(t)$ предполагаются кусочно-постоянными функциями времени с конечным числом точек переключения, последняя из которых обозначается символом T, и рассматриваются далее в следующем представлении:

$$u_k(t) = \sum_{i=1}^{2r_k} (-1)^{i+1} h_i^k H(t - t_i^k) + \\ + \sum_{i=1}^{2q_k} (-1)^i \tilde{h}_i^k H(t - \tilde{t}_i^k). \quad (1.3)$$

Здесь управление разбито на положительные ступени, направленные вверх, и отрицательные, направленные вниз. r_k – число положительных, q_k – отрицательных ступеней компоненты u_k управления U, а t_i^k и $\tilde{t}_i^k$ – моменты времени, соответствующие переключениям этих ступеней, причем все они лежат на промежутке $[0, T]$; h_i^k, $\tilde{h}_i^k$ – постоянные, причем $h_i^k = h_{i+1}^k$, $\tilde{h}_i^k = \tilde{h}_{i+1}^k$ при $i = 1, 3, 5\ldots$; $H(t)$ – функция Хевисайда единичного скачка:

$$H(t - t_i^k) = \begin{cases} 1, & t - t_i^k = 0, \\ 0, & t - t_i^k < 0. \end{cases}$$

При таком управлении решение задачи (1.1) будет суммой нескольких слагаемых, отвечающим тем или иным собственным значениям матрицы A. Слагаемое, отвечающее собственному значению k, будем называть частотной компонентой решения, отвечающей этому k.

В качестве минимизируемого функционала рассматривается величина

$$J = \sum_{k=1}^{n} \int_0^T |u_k(t)|\, dt, \quad (1.4)$$

которая называется функционалом типа «расход топлива», или просто функционалом расхода. Допустимым считается управление U вида (1.3), которое в конечный момент T обращает в ноль одну или несколько избранных частотных компонент решения. Обозначая сумму избранных компонент символом $\tilde{x}(t)$, запишем это условие:

$$\tilde{x}(T) = 0. \quad (1.5)$$

Ради краткости о выполнении условия (1.5) мы будем говорить также как о гашении избранных частотных компонент решения, или просто как о гашении избранных частот.

Постановка задачи следующая: при заданном числе импульсов допустимого управления найти точки переключения этого управления (включая точку T), удовлетворяющие необходимым условиям экстремума функционала расхода (1.4).

Такую постановку нельзя считать традиционной, поэтому стоит остановиться на мотивировках, которые оправдывают её естественность и необходимость в каких-то случаях.

Задача о гашении только одной или нескольких частотных компонент может возникнуть по самому существу прикладной проблемы или в связи со сложностью гасить сразу колебания с сильно различающимися по величине частотами и т. д. В целом она является более общей задачей, чем гашение всех компонент сразу. С другой стороны, оптимальное «по расходу» управление в различных других постановках, предполагающее гашение сразу всех компонент в некоторый фиксированный момент, существует отнюдь не всегда (см., например, [3]).

Кусочно-постоянные управления в конкретных практических задачах могут быть единственно приемлемым дешевым вариантом управления. Кроме того, такие управления оказываются оптимальными при решении многих задач в различных других постановках (см., например, [3, 4]).

Для решения рассматриваемой задачи мы предлагаем несколько теорем, которые в зависимости от собственных значений матрицы A позволяют находить оптимальное по расходу топлива управление $U(t)$ либо в явной форме, либо с помощью численных методов.

Если матрица A имеет несколько различных пар чисто мнимых или комплексных собственных значений, то соответствующие этим парам частоты можно гасить либо последовательно, либо вместе, используя для этого различные алгоритмы.

2 Теоремы

Представим полученные результаты в форме теорем.

Теорема 1

Пусть управляемое движение определяется задачей (1.1) и среди собственных значений матрицы A есть $2m$ комплексно-сопряженных некратных чисел $k_j = l_j \pm i\mu_j$, j = 1, 3, 5…, $2m-1$, ($2m \le n$). Тогда если допустимое управление вида (1.3) обращает в нуль величину $\tilde{x}(T) = (x(l_j \pm i\mu_j, T))$, то его точки переключения t_i^k, $\tilde{t}_i^k$, соответствующие необходимым условиям экстремума функционала (1.4), определяются совместным решением системы граничных условий

$$\begin{aligned} K_j &= y'_{j_0} + \frac{1}{l^2+\mu^2}\sum_{k=1}^{n}(l_j c'_{jk} + \mu_j c^*_{jk})F_{1j}^k + \\ &\quad + (l_j c^*_{jk} - \mu_j c'_{jk})F_{2j}^k = 0; \\ K_{j+1} &= y^*_{j_0} + \frac{1}{l^2+\mu^2}\sum_{k=1}^{n}(l_j c^*_{jk} - \mu_j c'_{jk})F_{1j}^k - \\ &\quad - (l_j c'_{jk} + \mu_j c^*_{jk})F_{2j}^k = 0, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где

$$\begin{aligned} F_{1j}^k &= \sum_{i=1}^{2r_k}(-1)^{i+1} h_i^k H(t - t_i^k) e^{-l_j t_i^k} \cos\mu_j t_i^k + \\ &+ \sum_{i=1}^{2q_k}(-1)^i \tilde{h}_i^k H(t - \tilde{t}_i^k) e^{-l_j \tilde{t}_i^k} \cos\mu_j \tilde{t}_i^k; \\ F_2^k &= \sum_{i=1}^{2r_k}(-1)^{i+1} h_i^k H(t - t_i^k) e^{-l_j t_i^k} \sin\mu_j t_i^k + \\ &+ \sum_{i=1}^{2q_k}(-1)^i \tilde{h}_i^k H(t - \tilde{t}_i^k) e^{-l_j \tilde{t}_i^k} \sin\mu_j \tilde{t}_i^k, \end{aligned} \tag{2.2}$$

и необходимых условий оптимальности

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{2m-1}\left[(\lambda_j c'_{jk} + \lambda_{j+1} c^*_{jk})\cos\mu_j t_i^k\right] e^{-\alpha_j t_i^k} + \\ &+ \sum_{j=1}^{2m-1}\left[(\lambda_j c^*_{jk} - \lambda_{j+1} c'_{jk})\sin\mu_j t_i^k\right] e^{-\alpha_j t_i^k} = -1; \\ &\sum_{j=1}^{2m-1}\left[(\lambda_j c'_{jk} + \lambda_{j+1} c^*_{jk})\cos\mu_j \tilde{t}_i^k\right] e^{-\alpha_j \tilde{t}_i^k} + \\ &+ \sum_{j=1}^{2m-1}\left[(\lambda_j c^*_{jk} - \lambda_{j+1} c'_{jk})\sin\mu_j \tilde{t}_i^k\right] e^{-\alpha_j \tilde{t}_i^k} = 1. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Теорема 2

Пусть управляемое движение определяется задачей (1.1), а $k_{1,2} = l \pm i\mu$ – пара коплексно-сопряженных некратных собственных значений матрицы A. Тогда если допустимое управление вида (1.3) обращает в нуль величину $\tilde{x}(T) = (x(l+i\mu, T), x(l-i\mu, T))$, то его точки переключения t_i^k, $\tilde{t}_i^k$, соответствующие необходимым условиям экстремума функционала (1.4), определяются следующими формулами:

$$\tau_i^k = \mu t_i^k + \varphi_k; \quad \tilde{\tau}_i^k = \mu \tilde{t}_i^k + \varphi_k; \tag{2.4}$$

$$B_k = e^{-\nu\tau_i^k}\sin\tau_i^k; \quad -B_k = e^{-\nu\tilde{\tau}_i^k}\sin\tilde{\tau}_i^k; \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned} &\sin\varphi_k = \pm(c'_{1,k} + mc^*_{1,k})q^{-1}\left|c_{1,k}\right|^{-1}; \\ &\lambda_1 B_k = S_k; \quad S_k = \mp e^{-\nu\varphi_k} q^{-1}\left|c_{1,k}\right|^{-1}; \end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned} K_1 = y'_{1_0} &\pm (\mu - ml)(l^2+\mu^2)^{-1} q^{-1} \times \\ &\times \sum_{k=1}^{n} e^{\nu\varphi_k} Q_k \left|c_{1,k}\right| = 0, \end{aligned} \tag{2.7}$$

где $\nu = l/\mu$; $q = \sqrt{1+m^2}$; $m = (y^*_{1,0}\mu - y'_{1,0}l) \times$ $\times (y^*_{1,0}l + y'_{1,0}\mu)$;

$$\begin{aligned} Q_k &= \sum_{i=1}^{2r_k}(-1)^{i+1} h_i^k H(\tau - \tau_i^k) e^{-\nu\tau_i^k} \times \\ &\times \cos\tau_i^k + \sum_{i=1}^{2q_k}(-1)^i \tilde{h}_i^k H(\tau - \tilde{\tau}_i^k) e^{-\nu\tilde{\tau}_i^k}\cos\tilde{\tau}_i^k. \end{aligned}$$

Из уравнений (2.5) и (2.7) мы можем численно найти B_k и все значения t_i^k, $\tilde{t}_i^k$ и, зная их, по формулам (2.4) и (2.6) получить искомые значения t_i^k, $\tilde{t}_i^k$ и множители Лагранжа λ_1.

Теорема 3

Пусть управляемое движение определяется задачей (1.1), а $k = l$ – вещественное собственное значение матрицы A. Допустимое управление вида (1.3), обращающее в нуль величину $\tilde{x}(T) = (x(l, T))$ и удовлетворяющее необходимым условиям экстремума функционала (1.4), состоит не более чем из одной ступени – либо положительной, либо отрицательной. Моментом включения этой ступени является момент $t = 0$, а момент выключения переключения t_2^k (либо $\tilde{t}_2^k$) определяется формулами

$$t_2^k = -\frac{1}{l}\ln\left(y_0 l\left[c_{1k}\sum\nolimits_{k=1}^{n} h_1^k \right]^{-1} \right);$$
$$\tilde{t}_2^k = -\frac{1}{l}\ln\left(-y_0 l\left[c_{1k}\sum\nolimits_{k=1}^{n} h_1^k \right]^{-1} \right). \qquad (2.8)$$

<u>Теорема 4</u>

Пусть управляемое движение определяется задачей (1.1), а $k_{1,2} = l \pm i\mu$ — пара мнимых некратных собственных значений матрицы A. Тогда если допустимое управление вида (1.3) обращает в нуль величину $\tilde{x}(T) = (x(i\mu, T)$, $x(-i\mu, T))$, то его точки переключения t_i^k, $\tilde{t}_i^k$, соответствующие необходимым условиям экстремума функционала (1.4), определяются следующими формулами:

$$t_i^k = \tilde{t}_i^k \pm \mu^{-1}\pi \pm 2\mu^{-1}\pi l;$$
$$t_i^k = \tilde{t}_{i+2}^k \pm 2\mu^{-1}\pi \pm 2\mu^{-1}\pi l; \qquad (2.9)$$

$$t_1^k = t_k - \Delta_k; \quad t_2^k = t_k + \Delta_k;$$
$$t_k = \mu^{-1}\mathrm{arctg}\frac{(y'_{1,0}c^*_{1,k} - y^*_{1,0}c'_{1,k})}{(y'_{1,0}c'_{1,k} + y^*_{1,0}c^*_{1,k})} + \pi m_k; \qquad (2.10)$$

$$\Delta_k = \mu^{-1}\arcsin \times$$
$$\times\frac{\sqrt{\lambda_1^2(y'^2_{1_0} + y^{*2}_{1_0})(c'^2_{1k} + c^{*2}_{1k}) - y'^2_{1_0}}}{|\lambda_1|\sqrt{(y'^2_{1_0} + y^{*2}_{1_0})(c'^2_{1k} + c^{*2}_{1k})}} + 2\pi l; \qquad (2.11)$$

$$(y'^2_{1_0} + y^{*2}_{1_0})\lambda_1 =$$
$$= -\frac{2}{\mu}\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^{m_k}\left(\sum_{i=1}^{r_k} h_i^k + \sum_{i=1}^{q_k}\tilde{h}_i^k\right)\times \qquad (2.12)$$
$$\times\sqrt{(y'^2_{1_0} + y^{*2}_{1_0})(c'^2_{1k} + c^{*2}_{1k})\lambda_1^2 - y'^2_{1_0}},$$

где $\sigma_k^{m_k} = (-1)^{m_k}\,\mathrm{sign}\,(y'_{1,0}c^*_{1,k} - y^*_{1,0}c'_{1,k}); l \in Z$; $m_k = 0, 1, \ldots$

Замечание

Величина $2\Delta_k$ – это ширина ступени управления u_k, а t_k – ее средний момент. Из уравнения (2.12) можно найти множитель Лагранжа λ_1 и, воспользовавшись формулами (2.10), (2.11) при каждом k, вычислить точки переключения t_1^k, t_2^k, что дает возможность найти все остальные точки переключения управления при этом k по формулам (2.9).

Теоремы не содержат условий существования точек переключения управлений, определяемых этими формулами и/или уравнениями. Такие вопросы должны прорабатываться при написании соответствующих вычислительных алгоритмов и программ.

3 Алгоритмы гашения

Для доказательства представленных теорем приведем алгоритмы гашения различных частот в зависимости от типа собственных значений матрицы A. Будем рассматривать случай гашения одной избранной частотной составляющей решения системы (1.1).

3.1 Случай комплексных собственных значений

Сначала рассмотрим наиболее общий из трех возможных случай, доказывающий теорему 2. Пусть среди собственных значений матрицы A системы (1.1) есть пара комплексно-сопряженных $k_{1,2} = l \pm \mu i$, причем соответствующая этой паре подматрица жордановой формы диагональна.

Поставленную в п. 1 задачу решим в несколько шагов.

<u>ШАГ 1.</u> Разделим задачу (1.1), (1.2) на две задачи Коши, чтобы далее можно было ограничиться рассмотрением только одной из них. Для этого в задаче Коши (1.1), (1.2) произведем линейную замену:

$$x = B\xi, \qquad (3.1)$$

где B – неособая матрица, а $\xi = (y, z) = (y_1, y_2, z_1, ..., z_{n-2}) = (\xi_1, ...\xi_n)$. Постоянную матрицу B можно подобрать так, чтобы

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & Z \end{pmatrix}; \; Y = \begin{pmatrix} l + i\mu & 0 \\ 0 & l - i\mu \end{pmatrix},$$

а Z – некоторая $(n-2)\times(n-2)$ матрица. Тогда уравнение (1.1) и условия (1.2) перейдут в следующие:

$$\dot{y} = Yy + V; \qquad y(0) = y_0; \qquad (3.2)$$

$$\dot{z} = Zz + W; \qquad z(0) = z_0, \qquad (3.3)$$

где $y_0 = Cx_0$; $z_0 = C_z x_0 = (z_{1_0}, ..., z_{n-2_0})$;

$$V = CU = (v_1, v_2);$$
$$W = C_z U = (w_1, ..., w_{n-2_0});$$
$$(V, W) = B^{-1}U;$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ c_{2n} & \cdots & c_{2n} \end{pmatrix}; \quad C_z = \begin{pmatrix} c_{31} & \cdots & c_{3n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}.$$

Далее достаточно ограничиться решением задачи (3.2).

ШАГ 2. Выпишем решение задачи (3.2) с учетом структуры управления (1.3).

Согласно структуре матрицы Y, система (3.2) состоит из двух линейных неоднородных дифференциальных уравнений:

$$\dot{y}_1 = (l + i\mu)y_1 + v_1(t);$$
$$\dot{y}_2 = (l - i\mu)y_2 + v_2(t);$$

где $v_1(t) = \sum_{k=1}^{n} c_{1k} u_k(t)$; $v_2(t) = \sum_{k=1}^{n} c_{2k} u_k(t)$

с начальными условиями

$$y_1(0) = y_{1_0} = \sum_{k=1}^{n} c_{1k} x_{k_0}; \; y_2(0) = y_{2_0} = \sum_{k=1}^{n} c_{2k} x_{k_0}.$$

По формуле Коши решение этой системы имеет вид

$$y_1 = y_{1_0} e^{(l+i\mu)t} + e^{(l+i\mu)t} \int_0^t v_1(\tau) e^{-(l+i\mu)\tau} d\tau;$$

$$y_2 = y_{2_0} e^{(l-i\mu)t} + e^{(l-i\mu)t} \int_0^t v_2(\tau) e^{-(l-i\mu)\tau} d\tau.$$

Используя показательную форму комплексного числа, перепишем это решение следующим образом:

$$y_1 = (y_{1_0} + \int_0^t v_1(\tau) e^{-l\tau} (\cos\mu\tau - i\sin\mu\tau) d\tau) \times$$
$$\times e^{lt} (\cos\mu t + i\sin\mu t);$$

$$y_2 = (y_{2_0} + \int_0^t v_2(\tau) e^{-l\tau} (\cos\mu\tau + i\sin\mu\tau) d\tau) \times$$
$$\times e^{lt} (\cos\mu t - i\sin\mu t).$$

Далее, учитывая при вычислении интегралов структуру управления (1.3) и то, что $H(t - t_i^k) = 0$, $H(t - \tilde{t}_i^k) = 0$ при $t < t_i^k$, $t < \tilde{t}_i^k$, получим решение задачи (3.2) в виде

$$\begin{aligned} y_1 = &\left\{ y_{1_0} + \frac{l - \mu i}{l^2 + \mu^2} \sum_{k=1}^{n} c_{1k} \left[F_1^k - iF_2^k \right] \right\} \times \\ &\times e^{lt} \cos\mu t + \\ &+ \left\{ iy_{1_0} + i\frac{l - \mu i}{l^2 + \mu^2} \sum_{k=1}^{n} c_{1k} \left[F_1^k - iF_2^k \right] \right\} \times \\ &\times e^{lt} \sin\mu t - \frac{l - \mu i}{l^2 + \mu^2} \sum_{k=1}^{n} c_{1k} u_k; \end{aligned} \qquad (3.4)$$

$$\begin{aligned} y_2 = &\left\{ y_{2_0} + \frac{l + \mu i}{l^2 + \mu^2} \sum_{k=1}^{n} c_{2k} \left[F_1^k + iF_2^k \right] \right\} \times \\ &\times e^{lt} \cos\mu t - \\ &- \left\{ iy_{2_0} + i\frac{l + \mu i}{l^2 + \mu^2} \sum_{k=1}^{n} c_{2k} \left[F_1^k + iF_2^k \right] \right\} \times \\ &\times e^{lt} \sin\mu t - \frac{l + \mu i}{l^2 + \mu^2} \sum_{k=1}^{n} c_{21k} u_k, \end{aligned}$$

где

$$F_1^k = \sum_{i=1}^{2r_k} (-1)^{i+1} h_i^k H(t - t_i^k) e^{-lt_i^k} \times$$
$$\times \cos \mu t_i^k +$$
$$+ \sum_{i=1}^{2q_k} (-1)^i \tilde{h}_i^k H(t - \tilde{t}_i^k) e^{-l\tilde{t}_i^k} \cos \mu \tilde{t}_i^k; \qquad (3.5)$$
$$F_2^k = \sum_{i=1}^{2r_k} (-1)^{i+1} h_i^k H(t - t_i^k) e^{-lt_i^k} \times$$
$$\times \sin \mu t_i^k +$$
$$+ \sum_{i=1}^{2q_k} (-1)^i \tilde{h}_i^k H(t - \tilde{t}_i^k) e^{-l\tilde{t}_i^k} \sin \mu \tilde{t}_i^k.$$

<u>ШАГ 3</u>. Запишем граничные условия (1.5) и функционал (1.4) явно через точки переключения.

Чтобы решить поставленную задачу гашения колебания частоты μ (т. е. чтобы выполнялось условие (1.5) $\tilde{x}(T) = 0$), мы должны потребовать, чтобы все выражения в фигурных скобках в формулах (3.4) были равны нулю после того, как отработают все двигатели, т. е. для $t > t_{2r_k}^k$, $t > t_{2q_k}^k$:

$$\left\{ y_{1_0} + \frac{l - \mu i}{l^2 + \mu^2} \sum_{k=1}^{n} c_{1k} \left[F_1^k - iF_2^k \right] \right\} = 0,$$
$$\left\{ y_{2_0} + \frac{l + \mu i}{l^2 + \mu^2} \sum_{k=1}^{n} c_{1k} \left[F_1^k + iF_2^k \right] \right\} = 0. \qquad (3.6)$$

Разделим начальные данные y_{1_0}, y_{2_0} и коэффициенты матрицы C на действительные и мнимые части:

$$y_{1_0} = y_{1_0}^{'} + iy_{1_0}^{*};$$
$$y_{2_0} = y_{2_0}^{'} + iy_{2_0}^{*};$$
$$c_{1k} = c_{1k}^{'} + c_{1k}^{*}; \qquad (3.7)$$
$$c_{2k} = c_{2k}^{'} + c_{2k}^{*}.$$

После подстановки формул (3.7) в выражения (3.6) видно, что последние представляют собой пару комплексно-сопряженных чисел, и чтобы они были равны нулю, достаточно, чтобы в ноль обращались их действительные и мнимые части. Таким образом, из формул (3.6) вытекают следующие граничные условия:

$$K_1 = y_{1_0}^{'} + \frac{1}{l^2 + \mu^2} \sum_{k=1}^{n} (lc_{1k}^{'} + \mu c_{1k}^{*}) F_1^k +$$
$$+ (lc_{1k}^{*} - \mu c_{1k}^{'}) F_2^k = 0;$$
$$K_2 = y_{1_0}^{*} + \frac{1}{l^2 + \mu^2} \sum_{k=1}^{n} (lc_{1k}^{*} - \mu c_{1k}^{'}) F_1^k - \qquad (3.8)$$
$$- (lc_{1k}^{'} + \mu c_{1k}^{*}) F_2^k = 0.$$

С учетом структуры управления (1.3) запишем функционал (1.4):

$$J = \sum_{k=1}^{n} \left[\sum_{i=1}^{2r_k} (-1)^i h_i^k t_i^k + \sum_{i=1}^{2q_k} (-1)^i \tilde{h}_i^k \tilde{t}_i^k \right]. \qquad (3.9)$$

Будем решать задачу минимизации функционала (3.9) при выполнении граничных условий (3.8).

<u>ШАГ 4</u>. Вводя множители Лагранжа λ_1 и λ_2, переходим к задаче на безусловный минимум относительно функционала R:

$$R = J + \lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2. \qquad (3.10)$$

Функционал R – функция числовых параметров λ_1, λ_2 – множителей Лагранжа и t_i^k, $\tilde{t}_i^k$ – точек переключения управления, поэтому можно выписать необходимые условия оптимальности управления:

$$\frac{\partial R}{\partial t_i^k} = 0, \frac{\partial R}{\partial \tilde{t}_i^k} = 0, \frac{\partial R}{\partial \lambda_1} = 0, \frac{\partial R}{\partial \lambda_2} = 0. \qquad (3.11)$$

Из первых двух равенств

$$(\lambda_1 c_{1k}^{'} + \lambda_2 c_{1k}^{*}) \cos \mu t_i^k +$$
$$+ (\lambda_1 c_{1k}^{*} - \lambda_2 c_{1k}^{'}) \sin \mu t_i^k = -e^{lt_i^k};$$
$$(\lambda_1 c_{1k}^{'} + \lambda_2 c_{1k}^{*}) \cos \mu \tilde{t}_i^k + \qquad (3.12)$$
$$+ (\lambda_1 c_{1k}^{*} - \lambda_2 c_{1k}^{'}) \sin \mu \tilde{t}_i^k = e^{l\tilde{t}_i^k}.$$

Формулы (3.12) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned}&\pm\sqrt{(\lambda_1^2+\lambda_2^2)(c_{1k}^{'2}+c_{1k}^{*2})}\times\\&\times\sin(\mu t_i^k+\varphi_k)=-e^{lt_i^k};\\&\pm\sqrt{(\lambda_1^2+\lambda_2^2)(c_{1k}^{'2}+c_{1k}^{*2})}\times\\&\times\sin(\mu\tilde{t}_i^k+\varphi_k)=e^{l\tilde{t}_i^k},\end{aligned}\tag{3.13}$$

где $\cos\varphi_k=\dfrac{\lambda_1 c_{1k}^{*}-\lambda_2 c_{1k}^{'}}{\pm\sqrt{(\lambda_1^2+\lambda_2^2)(c_{1k}^{'2}+c_{1k}^{*2})}}$;

$$\sin\varphi_k=\frac{\lambda_1 c_{1k}^{'}+\lambda_2 c_{1k}^{*}}{\pm\sqrt{(\lambda_1^2+\lambda_2^2)(c_{1k}^{'2}+c_{1k}^{*2})}}.\tag{3.14}$$

Примем следующие обозначения:

$$\tau_i^k=\mu t_i^k+\varphi_k;\ \tilde{\tau}_i^k=\mu\tilde{t}_i^k+\varphi_k;\ \nu=l/\mu;\tag{3.15}$$

$$B_k=\mp\frac{e^{-\nu\phi_k}}{\sqrt{(\lambda_1^2+\lambda_2^2)(c_{1k}^{'2}+c_{1k}^{*2})}}.\tag{3.16}$$

Теперь уравнения (3.13) можно представить так:

$$\sin\tau_i^k=B_k e^{\nu\tau_i^k};\ \sin\tilde{\tau}_i^k=-B_k e^{\nu\tilde{\tau}_i^k}.\tag{3.17}$$

Граничные условия (3.8) в обозначениях (3.15), (3.16) в зависимости от знака B_k будут следующими:

$$\begin{aligned}&K_1=y_{1_0}^{'}\pm\frac{1}{l^2+\mu^2}\sum_{k=1}^{n}e^{\nu\varphi_k}\times\\&\times\Big[(lc_{1k}^{'}+\mu c_{1k}^{*})(Q_k\cos\varphi_k+P_k\sin\varphi_k)+\\&+(lc_{1k}^{*}-\mu c_{1k}^{'})(P_k\cos\varphi_k-Q_k\sin\varphi_k)\Big]=0;\\&K_2=y_{1_0}^{*}\pm\frac{1}{l^2+\mu^2}\sum_{k=1}^{n}e^{\nu\varphi_k}\times\\&\times\Big[(lc_{1k}^{*}-\mu c_{1k}^{'})(Q_k\cos\varphi_k+P_k\sin\varphi_k)-\\&-(lc_{1k}^{'}+\mu c_{1k}^{*})(P_k\cos\varphi_k-Q_k\sin\varphi_k)\Big]=0,\end{aligned}\tag{3.18}$$

где

$$\begin{aligned}&Q_k=\sum_{i=1}^{2r_k}(-1)^{i+1}h_i^k H(\tau-\tau_i^k)e^{-\nu\tau_i^k}\times\\&\times\cos\tau_i^k+\sum_{i=1}^{2q_k}(-1)^i\tilde{h}_i^k H(\tau-\tilde{\tau}_i^k)e^{-\nu\tilde{\tau}_i^k}\cos\tilde{\tau}_i^k;\\&P_k=\sum_{i=1}^{2r_k}(-1)^{i+1}h_i^k H(\tau-\tau_i^k)e^{-\nu\tau_i^k}\times\\&\times\sin\tau_i^k+\sum_{i=1}^{2q_k}(-1)^i\tilde{h}_i^k H(\tau-\tilde{\tau}_i^k)e^{-\nu\tilde{\tau}_i^k}\sin\tilde{\tau}_i^k.\end{aligned}\tag{3.19}$$

Из формул (3.17) следует, что

$$B_k=e^{-\nu\tau_i^k}\sin\tau_i^k;\ -B_k=e^{-\nu\tilde{\tau}_i^k}\sin\tilde{\tau}_i^k.\tag{3.20}$$

Учитывая выражения (3.20), граничные условия (3.18) перепишем в виде

$$\begin{aligned}&K_1=y_{1_0}^{'}\pm\frac{1}{l^2+p^2}\sum_{k=1}^{n}e^{\nu\phi_k}Q_k\times\\&\times\begin{bmatrix}(lc_{1k}^{'}+pc_{1k}^{*})\cos\varphi_k-\\-(lc_{1k}^{*}-pc_{1k}^{'})\sin\varphi_k\end{bmatrix}=0;\\&K_2=y_{1_0}^{*}\pm\frac{1}{l^2+p^2}\sum_{k=1}^{n}e^{\nu\phi_k}Q_k\times\\&\times\begin{bmatrix}(lc_{1k}^{*}-pc_{1k}^{'})\cos\varphi_k+\\+(lc_{1k}^{'}+pc_{1k}^{*})\sin\varphi_k\end{bmatrix}=0.\end{aligned}\tag{3.21}$$

Чтобы представить граничные условия (3.21) как функции от τ_i^k, τ_i^k, λ_1, λ_2, используем выражения (3.14) для $\cos\varphi_k$ и $\sin\varphi_k$:

$$\begin{aligned}&K_1=y_{1_0}^{'}\pm\frac{\lambda_1\mu-\lambda_2 l}{(l^2+\mu^2)\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}}\times\\&\times\sum_{k=1}^{n}e^{\nu\varphi_k}Q_k\sqrt{c_{1k}^{'2}+c_{1k}^{*2}}=0;\\&K_2=y_{1_0}^{*}\pm\frac{\lambda_1 l+\lambda_2\mu}{(l^2+\mu^2)\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}}\times\\&\times\sum_{k=1}^{n}e^{\nu\varphi_k}Q_k\sqrt{c_{1k}^{'2}+c_{1k}^{*2}}=0.\end{aligned}\tag{3.22}$$

Отсюда следует, что

$$\lambda_2 = m\lambda_1; \;\; m = \frac{y^*_{1_0}\mu - y'_{1_0} l}{y^*_{1_0} l + y'_{1_0}\mu}. \qquad (3.23)$$

Для нахождения угла φ_k подставим полученное соотношение (3.23) в выражение для $\sin\varphi_k$ (3.14):

$$\sin\varphi_k = \frac{c'_{1k} + mc^*_{1k}}{\pm\sqrt{(1+m^2)(c'^2_{1k} + c^{*2}_{1k})}}. \qquad (3.24)$$

Таким образом, угол φ_k можно найти из начальных данных задачи. Зависимость B_k от λ_1 выражается следующим образом:

$$B_k = \frac{S_k}{\lambda_1}; \;\; S_k = \mp\frac{e^{-\nu\varphi_k}}{\sqrt{(1+m^2)(c'^2_{1k} + c^{*2}_{1k})}}. \qquad (3.25)$$

Принимая во внимание формулу (3.23), можно увидеть, что достаточно потребовать выполнения всего лишь одного из граничных условий (3.22), которое с учетом (3.23) будет выглядеть так:

$$K_1 = y'_{1_0} \pm \frac{\mu - ml}{(l^2+\mu^2)\sqrt{1+m^2}} \times$$
$$\times \sum_{k=1}^{n} e^{\nu\varphi_k} Q_k \sqrt{c'^2_{1k} + c^{*2}_{1k}} = 0. \qquad (3.26)$$

Из уравнений (3.17) и (3.26) мы можем численно найти B_k и все значения τ_i^k, τ_i^k и, зная их, по формулам (3.15), (3.25) и (3.23) получить искомые значения t_i^k, $\tilde{t}_i^k$ и множители Лагранжа.

Что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 1 следует из формул (3.5), (3.8) и (3.12) приведенного алгоритма.

Ниже приводятся два частных варианта рассмотренного выше случая, доказывающие теоремы 3, 4 и позволяющие получить явные формулы для точек переключения искомого управления.

3.2 Случай вещественных собственных значений

Для доказательства теоремы 3 предположим, что среди собственных чисел матрицы A есть вещественное l, причем это значение не является кратным. Поставленную в п. 1 задачу для этого случая решим, следуя изложенному выше алгоритму, в несколько шагов.

<u>ШАГ 1</u>. Делая линейную замену (3.1) и разделяя задачу (1.1), (1.2) на две задачи Коши, получаем необходимую к решению задачу (3.2) в виде

$$\dot{y} = Yy + v, \;\; y(0) = y_0, \;\; Y = (l),$$
$$y_0 = Cx_0, \;\; v = CU, \;\; C = (c_{11} \ldots c_{1n}). \qquad (3.27)$$

<u>ШАГИ 2, 3</u>. Граничное условие (3.8) в данном случае имеет вид

$$K = y_0 + \frac{1}{l}\sum_{k=1}^{n} c_{1k} F^k = 0; \qquad (3.28)$$

где $y_0 = \sum_{k=1}^{n} c_{1k} x_{k_0}$;

$$F^k = \sum_{i=1}^{2r_k} (-1)^{i+1} h_i^k H(t - t_i^k) e^{-lt_i^k} + \qquad (3.29)$$
$$+ \sum_{i=1}^{2q_k} (-1)^i \tilde{h}_i^k H(t - \tilde{t}_i^k) e^{-l\tilde{t}_i^k}.$$

Формула (3.9) описывает функционал качества J как явную функцию точек переключения. Далее будем решать задачу минимизации функционала (3.9) при выполнении граничного условия (3.28).

<u>ШАГ 4</u>. Переходя к задаче на безусловный минимум, из первых двух необходимых условий оптимальности управления (2.11) для функционала R получаем:

$$1 + \lambda c_{1k} e^{-lt_i^k} = 0, \quad 1 - \lambda c_{1k} e^{-l\tilde{t}_i^k} = 0. \qquad (3.30)$$

Отсюда следует, что

$$e^{-lt_i^k} = -1/\lambda c_{1k};\ e^{-l\tilde{t}_i^k} = 1/\lambda c_{1k}. \quad (3.31)$$

Очевидно, что оба равенства (3.31) не могут выполняться одновременно. Из этого можно сделать вывод, что включаются либо только положительные импульсы, либо только отрицательные.

Рассмотрим первый вариант, т. е. предположим, что включаются только положительные импульсы. В этом случае выполняется первое из равенств (3.31). Подставляя его в граничное условие (3.28), мы видим, что существует только одна точка переключения, которая, очевидно, является точкой выключения импульса управления. Точкой же включения управления является момент времени $t = 0$. Тогда из (3.28) следует, что

$$\lambda = -(y_0 l)^{-1} \sum_{k=1}^{n} h_1^k,$$

а с учетом этого из (3.31) получаем формулу (2.8) для нахождения t_2^k.

Аналогично для случая, когда включаются только отрицательные импульсы, получим для множителя Лагранжа то же выражение. Учитывая это, находим из (3.31) точку выключения отрицательного импульса.

3.3 Случай чисто мнимых собственных значений

Теперь для доказательства теоремы 4 предположим, что вещественная часть комплексно-сопряженных собственных чисел $k_{1,2}$ матрицы A, рассмотренных в п. 3.1, равна нулю, т. е. $l = 0$. Тогда $k_{1,2} = \pm i\mu$ – чисто мнимые собственные значения. Этой паре соответствует колебание частоты μ. Для оптимального по «расходу» гашения этой частоты приведенный алгоритм позволяет найти точки переключения управления $U(t)$ в явном виде.

Проделав, согласно предложенному в п. 3.1 алгоритму, шаги 1–3, на шаге 4 получаем формулы (3.12) в следующем виде:

$$\begin{gathered}(\lambda_1 c_{1k}^* - \lambda_2 c_{1k}')\sin\mu t_i^k + \\ + (\lambda_1 c_{1k}' + \lambda_2 c_{1k}^*)\cos\mu t_i^k = -1; \\ (\lambda_1 c_{1k}^* - \lambda_2 c_{1k}')\sin\mu \tilde{t}_i^k + \\ + (\lambda_1 c_{1k}' + \lambda_2 c_{1k}^*)\cos\mu \tilde{t}_i^k = 1.\end{gathered} \quad (3.32)$$

Отсюда следует, что

$$\begin{gathered}t_i^k = \tilde{t}_i^k \pm \pi/\mu \pm 2\pi l/\mu; \\ t_i^k = t_{i+2}^k \pm 2\pi/\mu \pm 2\pi l/\mu;\ l \in Z.\end{gathered} \quad (3.33)$$

Учитывая это, последние два равенства (3.11)

$$\begin{gathered}K_1 = y_{1_0}' + \frac{1}{\mu}\sum_{k=1}^{n} h_k (r_k + q_k) \times \\ \times [c_{1k}^*(\cos\mu t_1^k - \cos\mu t_2^k) - \\ - c_{1k}'(\sin\mu t_1^k - \sin\mu t_2^k) = 0; \\ K_2 = y_{1_0}^* - \frac{1}{\mu}\sum_{k=1}^{n} h_k (r_k + q_k) \times \\ \times [c_{1k}'(\cos\mu t_1^k - \cos\mu t_2^k) + \\ + c_{1k}^*(\sin\mu t_1^k - \sin\mu t_2^k) = 0.\end{gathered} \quad (3.34)$$

Здесь t_1^k – момент первого включения компоненты управления для k-й координаты, t_2^k – момент её первого выключения. Введем обозначения: $2\Delta_k$ – ширина ступени управления u_k; t_k – ее средний момент, т. е.

$$t_1^k = t_k - \Delta_k;\ t_2^k = t_k + \Delta_k. \quad (3.35)$$

Тогда из (3.9) и (3.34) получаем функционал и граничные условия:

$$M = 2\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{r_k} h_i^k + \sum_{i=1}^{q_k} \tilde{h}_i^k\right)\Delta_k; \quad (3.36)$$

$$\begin{gathered}L_1 = y_{1_0}' + \frac{2}{\mu}\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{r_k} h_i^k + \sum_{i=1}^{q_k} \tilde{h}_i^k\right) \times \\ \times (c_{1k}^*\sin\mu t_k + c_{1k}'\cos\mu t_k)\sin\mu\Delta_k = 0; \\ L_2 = y_{1_0}^* - \frac{2}{\mu}\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{r_k} h_i^k + \sum_{i=1}^{q_k} \tilde{h}_i^k\right) \times \\ \times (c_{1k}'\sin\mu t_k - c_{1k}^*\cos\mu t_k)\sin\mu\Delta_k = 0.\end{gathered} \quad (3.37)$$

Величины M, L_1, L_2 – функции числовых параметров t_k и Δ_k, поэтому исходная задача оптимизации свелась к задаче безусловной минимизации функции $S = M + \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2$ по всем переменным t_k, Δ_k, λ_1, λ_2.

Приравнивая нулю производные S по t_k и Δ_k, получим:

$$\begin{gathered}
[(\lambda_1 c^{*}_{1k} - \lambda_2 c^{'}_{1k}) \sin \mu t_k + (\lambda_1 c^{'}_{1k} + \lambda_2 c^{*}_{1k}) \times \\
\times \cos \mu t_k] \cos \mu\Delta_k = -1; \\
[(\lambda_1 c^{'}_{1k} + \lambda_2 c^{*}_{1k}) \sin \mu t_k - (\lambda_1 c^{*}_{1k} - \lambda_2 c^{'}_{1k}) \times \\
\times \cos \mu t_k] \sin \mu\Delta_k = 0.
\end{gathered} \tag{3.38}$$

Таким образом, величины t_k, Δ_k и λ_1, λ_2 должны быть найдены из уравнений (3.37), (3.38).

ШАГ 5. Представим $\cos\mu t_k$, $\cos\mu\Delta_k$, $\sin\mu t_k$, $\sin\mu\Delta_k$ как функции от λ_1, λ_2. Для этого перепишем уравнения (3.38) в виде:

$$\begin{gathered}
(b_k \sin \mu t_k + a_k \cos \mu t_k) \cos \mu\Delta_k = -1; \\
(a_k \sin \mu t_k - b_k \cos \mu t_k) \sin \mu\Delta_k = 0;
\end{gathered} \tag{3.39}$$

где

$$a_k = \lambda_1 c^{'}_{1k} + \lambda_2 c^{*}_{1k}; \; b_k = \lambda_1 c^{*}_{1k} - \lambda_2 c^{'}_{1k}. \tag{3.40}$$

Возможны два варианта решения системы (3.39):

1) $\sin\mu\Delta_k = 0 \Rightarrow \cos\mu\Delta_k = \pm 1$. Это означает либо отсутствие управления ($\Delta_k = 0$), либо, в силу (3.33), его непрерывность ($\Delta_k = \pi/\mu$), т. е. отсутствие переключений. Тогда формулы для определения $\sin\mu t_k$ и $\cos\mu t_k$ следующие:

$$\begin{gathered}
\sin \mu t_k = \frac{\mp b_k \mp a_k \sqrt{a_k^2 + b_k^2 - 1}}{a_k^2 + b_k^2}; \\
\cos \mu t_k = \frac{\mp a_k \pm b_k \sqrt{a_k^2 + b_k^2 - 1}}{a_k^2 + b_k^2};
\end{gathered} \tag{3.41}$$

2) $\sin\mu\Delta_k \neq 0$, тогда $\cos\mu\Delta_k = \alpha_k \neq 0$, а $\sin\mu t_k$ и $\cos\mu t_k$ представляются формулами

$$\begin{gathered}
\sin \mu t_k = \frac{-b_k}{\alpha_k (a_k^2 + b_k^2)}; \\
\cos \mu t_k = \frac{-a_k}{\alpha_k (a_k^2 + b_k^2)};
\end{gathered} \tag{3.42}$$

$$\begin{gathered}
\sin \mu\Delta_k = \sqrt{1 - \alpha_k} = \sqrt{\frac{a_k^2 + b_k^2 - 1}{a_k^2 + b_k^2}}; \\
\cos \mu\Delta_k = \alpha_k = \sqrt{\frac{1}{a_k^2 + b_k^2}}.
\end{gathered} \tag{3.43}$$

ШАГ 6. При подстановке формул (3.42), (3.43) в граничные условия (3.37) мы находим соотношения для λ_1 и λ_2:

$$\lambda_2 = \frac{y^{*}_{1_0}}{y^{'}_{1_0}} \lambda_1. \tag{3.44}$$

Из второго уравнения (3.39) в зависимости от промежутка начала управления однозначно определяется величина t_k:

$$\begin{gathered}
\mu t_k = b_k / a_k \quad \Rightarrow \\
\Rightarrow t_k = \mu^{-1} \operatorname{arctg} \frac{b_k}{a_k} + \pi m_k; \; m_k \in Z.
\end{gathered}$$

Тогда

$$\sin \mu t_k = \frac{\mu t_k}{\pm\sqrt{1 +^2 \mu t_k}}; \; \cos \mu t_k = \frac{1}{\pm\sqrt{1 +^2 \mu t_k}}.$$

Знак перед корнем зависит от выбора момента начала управления, т. е. от значения m_k: если m_k четное, то $\sin\mu\Delta_k > 0$, иначе $\sin\mu\Delta_k < 0$.

Принимая во внимание соотношение (3.44) и (3.38), получаем

$$\operatorname{tg} \mu t_k = \frac{(y^{'}_{1,0} c^{*}_{1,k} - y^{*}_{1,0} c^{'}_{1,k})}{(y^{'}_{1,0} c^{'}_{1,k} + y^{*}_{1,0} c^{*}_{1,k})};$$

$$\sin\mu t_k = \frac{y^{'}_{1_0} c^{*}_{1k} - y^{*}_{1_0} c^{'}_{1k}}{\sigma_k^{m_k} \sqrt{(y^{'2}_{1_0} + y^{*2}_{1_0})(c^{'2}_{1k} + c^{*2}_{1k})}}; \tag{3.45}$$

$$\cos \mu t_k = \frac{y'_{1_0} c'_{1k} + y^*_{1_0} c^*_{1k}}{\sigma_k^{m_k} \sqrt{(y'^2_{1_0} + y^{*2}_{1_0})(c'^2_{1k} + c^{*2}_{1k})}},$$

где $\sigma_k^{m_k} = (-1)^{m_k} \operatorname{sign}(y'_{1,0} c^*_{1,k} - y^*_{1,0} c'_{1,k})$; $m_k = 0$, 1,...

Из первого уравнения (3.39) $\cos \mu \Delta_k = -1/(b_k \sin \mu t_k + a_k \cos \mu t_k)$. Согласно (3.33), $2\mu\Delta_k < \pi$, следовательно, $\cos\mu\Delta_k > 0$, $\sin\mu\Delta_k > 0$. С учетом (3.43) и (3.44) запишем:

$$\cos \mu \Delta_k = -\frac{\sigma_k^{m_k} y'_{1_0}}{|\lambda_1| \sqrt{(y'^2_{1_0} + y^{*2}_{1_0})(c'^2_{1k} + c^{*2}_{1k})}};$$

$$(3.46)$$

$$\sin \mu \Delta_k = \frac{\sqrt{\lambda_1^2 (y'^2_{1_0} + y^{*2}_{1_0})(c'^2_{1k} + c^{*2}_{1k}) - y'^2_{1_0}}}{|\lambda_1| \sqrt{(y'^2_{1_0} + y^{*2}_{1_0})(c'^2_{1k} + c^{*2}_{1k})}}.$$

Подставляя (3.45), (3.46) в граничные условия (3.37), получаем уравнение для нахождения λ_1 (2.12).

Таким образом, управление колебательным движением системы *n*-го порядка с помощью ступенчатой управляющей функции представляет собой периодический процесс, где для каждой из составляющих управления u_k через половину периода колебаний рассматриваемой частоты чередуются положительные и отрицательные ступени, длительность которых определяется формулами (3.46), а моменты включений управления – формулами (3.35) и (3.45). Количество этих ступеней $(r_k + q_k)$ зависит от времени, отведенного для решения задачи гашения. При увеличении времени гашения t возрастает число ступеней управления $((r_k + q_k) \to \infty)$, уменьшается ширина ступени $(\Delta_k \to 0)$, что влечет за собой уменьшение функционала M, т. е. теоретически оптимальным по расходу топлива без ограничения времени оказывается импульсный режим. Реальный режим будет тем ближе к идеальному теоретическому, чем меньше величина ступени управления $2\Delta_k$.

Заключение

Сформулированные в статье теоремы позволяют найти оптимальное по «расходу» управление в виде явной функции времени в постановках, где требуется погасить одну или несколько частотных компонент решений линейной системы с постоянными коэффициентами. Предлагаемые здесь результаты, основанные на работах [5, 6], могут теперь применяться не только в механике управляемого движения, но и в любой задаче, которую можно описать автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений с управлением.

Библиографический список

1. **Оптимальное** демпфирование быстрых линейных колебаний стационарного ИСЗ с маховиком / Л. К. Бабаджанянц, Н. И. Голубева, В. С. Новосёлов // Проблемы механики управляемого движения. – Вып. 3. – Пермь. – 1973. – С. 18–25.

2. **Энергетически** оптимальное демпфирование свободных боковых колебаний стационарного ИСЗ с маховиком / Л. К. Бабаджанянц, Н. И. Голубева, В. С. Новосёлов // Проблемы механики управляемого движения. – Вып. 3. – Пермь. – 1973. – С. 26–32.

3. **Оптимальное** управление / М. Атанс, П. Фалб. – Москва : Машиностроение, 1968. – 764 с.

4. **Математическая** теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко. – Москва : Наука ; Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 1983. – 392 с.

5. **Управление** по критерию расхода в механических системах / Л. К. Бабаджанянц, И. Ю. Потоцкая. – Санкт-Петербург : СПбГУ, 2003. – 137 с. – [Электронный ресурс]. – URL : http://www.apmath.spbu.ru/ru/staff/babadzhanyants/publ/publ2.pdf.

6. **Управление** вращением спутника по критерию расхода / Л. К. Бабаджанянц, И. Ю. Потоцкая, Ю. Ю. Пупышева // Устойчивость и процессы управления : сб. тр. междунар. конф. – Т. 2. – Санкт-Петербург : СПбГУ ; НИИ ВМ и ПУ ; ВВМ, 2005. – С. 554–567.