УДК 624.074.5

И. С. Талантов

КОМБИНИРОВАННЫЙ СПЕКТРАЛЬНО-ЧИСЛЕННЫЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ НА ВНЕЗАПНОЕ УДАЛЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ НА ПРИМЕРЕ СТАЛЬНОГО СТРУКТУРНОГО ПОКРЫТИЯ. ЧАСТЬ 1

Дата поступления: 28.08.2015
Решение о публикации: 20.10.2015

Цель: Исследовать возможность применения спектрального анализа, лишенного недостатков численного интегрирования, в расчетах на прогрессирующее обрушение на этапе линейного деформирования систем. Предложить алгоритм, сочетающий в себе достоинства аналитического и численного решений дифференциального уравнения движения. **Методы:** Применялось решение задачи на собственные значения, использовались нормальные координаты при снижении размерности задачи, явное численное интегрирование по методу Адамса. **Результаты:** Предложен комбинированный динамический метод расчета стержневых систем с выключающимися элементами, основанный на разложении по формам колебаний до момента достижения пластических деформаций и численном решении при переходе в физическую нелинейность. В первой (теоретической) части изложены общая методика расчета и принятые в рамках задачи допущения. Описан потенциал линейного динамического расчета в форме задачи на собственные значения при анализе поведения реальных металлических структур, подверженных внезапному выключению элементов. Изложена основная идея и допущения предложенного подхода. Описаны расчетные предпосылки при анализе живучести покрытия павильона № 5 а ОАО «ЛЕНЭКСПО». **Практическая значимость:** Описанный метод служит альтернативой и верификацией широко применяемым численным методам, используемым при проектировании особо ответственных зданий, позволяя сократить объем необходимых вычислений и получить аналитическое решение на этапе линейного деформирования.

Динамика сооружений, прогрессирующее обрушение, спектральный анализ, численное интегрирование, живучесть металлоконструкций.

Ivan S. Talantov, postgraduate student, i.talantov@yandex.ru (Saint-Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering) MULTIMODAL SPECTRUM-NUMERICAL APPROACH TO PROBLEM OF SUDDEN ELEMENT DELETION ON THE EXAMPLE OF STEEL SPACE GRID STRUCTURES. PART 1

Objective: To study the possibility of applying spectrum analysis, devoid of drawbacks of numerical integration, in progressive collapse calculations during linear deformations stage. To suggest an algorithm combining advantages of analytical and numerical calculations of differential equation of motion. **Methods:** Free vibrations problem, usage of generalised co-ordinates for reducing system degree of freedom amount, explicit numerical integration by the Adams method. **Results:** A combined dynamic design method for bar system with failing elements, based on mode decomposition until plastic deformations appear, and numerical integration after reaching physical nonlinearity is considered in the article. In the first theoretical part base calculations method and assumptions are described. Potential of linear dynamic calculation in form of free vibrations problem in analysis of real steel space grid structures affected by sudden element failure is described. Basic idea and assumptions of suggested approach are described. Calculation factors in robustness analysis of steel space grid coating of Lenexpo 5a pavilion are described. **Practical importance:** Described method is an alternative and a verification for the widely used numerical methods in unique and particularly important structures design. It reduces the amount of necessary calculations, and permits getting analytical solution during linear deformation stage.

Structure dynamics, progressive collapse, spectrum analysis, numerical integration, robustness of steel structures.

Одно из наиболее актуальных и быстро развивающихся в последние годы направлений строительный механики – выполнение требований нормативной литературы [7] в части обеспечения живучести конструкций в условиях аварийных ситуаций. Примером тому служат работы В. О. Алмазова, А. М. Белостоцкого, Ю. В. Бондарева, В. М. Бондаренко, Г. А. Гениева, С. Г. Емельянова, Е. Г. Еремеева, В. И. Колчунова, Н. В. Клюевой, А. С. Павлова, И. А. Петрова, А. И. Плотникова, А. Н. Потапова, Б. С. Расторгуева, И. Н. Серпика, А. Г. Тамразяна, Е. М. Уфимцева, Ю. Т. Чернова и других авторов.

Отсутствие утвержденных на государственном уровне положений расчета зданий на воздействие в виде внезапного удаления элементов порождает разногласия в среде проектировщиков и экспертов. В связи с этим задача прикладной науки – выработать общепринятые методики расчета, дающие количественную оценку напряженно-деформированного состояния поврежденных систем. Не останавливаясь подробно на нюансах работ разных авторов, отметим, что чаще всего указанную тему развивают расчеты в двух направлениях: квазистатический в нелинейной постановке с использованием теории предельного равновесия, применяемой для железобетоных конструкций разных конструктивных схем, и нелинейный динамический с применением явного интегрирования по времени, дающий наиболее точные и наглядные результаты, правда, не лишенный недостатков.

Прикладное проектирование нуждается в методе, способном получать динамический отклик систем в любой момент времени и при этом не требующий серьёзных машинных и трудовых затрат. По мнению автора, спектральный анализ систем, базирующийся на разложении по формам колебаний [4, 5], часто незаслуженно отвергается при рассмотрении данной темы и может успешно применяться в расчетах на прогрессирующее обрушение конструкций, в первую очередь, металлических.

Дело в том, что для пространственных металлических конструкций основным критерием отказа элемента становится условие не прочности, а устойчивости, причем отношения напряжений, соответствующих пределу текучести и критическому напряжению, различаются в разы. В связи с этим событие, переводящее систему из одной стадии обрушения в другую, наступает задолго до возникновения текучести в элементах системы.

Критерий потери устойчивости

В задачах устойчивости стержней при динамических нагрузках следует четко разделять два понятия: нагружение быстро возрастающей силой и ударное нагружение. При ударном нагружении скорость нарастания напряжений в элементе велика настолько, что проявляется эффект запаздывания пластических деформаций, что, как известно, приводит к возможному «проскакиванию» первой критической силы и к потере устойчивости по одной из высших форм [6]. По результатам испытаний [9] установлено, что в этом случае речь идет о периодах порядка 300–400 мкс. Но подобный подход справедлив, если предполагать, что удаление элемента по своему динамическому эффекту тождественно удару или внезапному импульсу.

В [3] отмечалось, что причиной возникновения колебаний (или изменения размаха колебаний движущейся системы) после удаления элемента или связи является сила инерции, пропорциональная изменению жесткости системы при переходе из одной стадии обрушения в другую. Скорость изменения внутренних силовых параметров при этом велика, но конечна и, как правило, не превышает указанных выше величин.

Вторым допущением является предположение, что гибкие тонкостенные трубы, рассматриваемые в статье, теряют общую устойчивость согласно теории устойчивости сплошных стержней, а не из-за сминания стенки (как для тонкостенных цилиндрических оболочек). Забегая вперед отметим, что большинство стержней в структуре, принятой в качестве расчетного примера, подобраны как раз по условию гибкости.

В связи с этими двумя допущениями предположим, что для описанного класса задач вполне достаточно использовать критерий устойчивости, соответствующий формуле Эйлера.

Общий вид решения

В соответствии с [3] уравнение движения системы при решении методом конечных элементов представляет собой неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с константой в правой части:

$$[M]\cdot\{\ddot{U}\}+[K]\cdot\{U\}=\{F\},$$

где $[M]$ – матрица масс; $\{U\}$ – вектор узловых перемещений; $[K]$ – глобальная матрица жесткости; $\{F\}$ – вектор узловых сил.

Его решением служит выражение для определения любого узлового перемещения в каждый момент времени:

$$u_k=\sum_{i=1}^{DDF} y_{ik}\times$$
$$\times\begin{pmatrix} A_i\cdot\sin(\omega_i\cdot(t-t^{n-1}_{\text{обр}}))+\\ +B_i\cdot\cos(\omega_i\cdot(t-t^{n-1}_{\text{обр}}))+\\ +\dfrac{1}{\omega_i^2}\cdot\dfrac{\sum_{j=1}^{J}F_j\cdot y_{ij}}{\sum_{j=1}^{J}M_j\cdot y_{ij}^2}\end{pmatrix},$$

где u_k – k-е узловое перемещение; DDF – общее число учитываемых степеней свободы; y_{ik} – компоненты нормированного собственного вектора; A_i, B_i – компоненты векторов постоянных интегрирования, соответствующие i-му тону колебаний; ω_i – i-я круговая частота собственных колебаний; $t^{n-1}_{\text{обр}}$ – время обрыва (потери устойчивости) предыдущего элемента, момент начала рассматриваемой стадии обрушения.

Указанная форма записи позволяет собрать все воздействия на систему в одно выражение, тем самым упрощая поиск любых внутренних усилий в стержнях:

$$\{\sigma\}=f(\{U\}).$$

При этом усложняется процесс поиска постоянных интегрирования для больших систем (ввиду решения системы уравнений с участием члена при $1/\omega_i^2$. Одним из способов упрощения поиска решения служит идея получения вектора постоянных $\{B\}$ с использованием начальных условий по ускорениям [3]. Тем не менее, для больших систем решение в предложенной форме остается достаточно затратным, при том что получаемый спектр частот содержит большие по величине компоненты, периоды колебаний по которым сопоставимы со скоростью распространения усилий в металле и быстро затухающих при учете демпфирования.

Снижение числа динамических степеней свободы. Решение в нормальных координатах

Для ограничения спектра частот и снижения количества значимых степеней свободы обратимся к теории расчета зданий на сейсмостойкость. Для внешнего воздействия на сооружения существует некий порог частоты (ускорение нулевого периода), после которого сооружение реагирует на возмущение как твердое тело, иными словами, относительные колебания масс не возмущаются. В своей классической работе А. Н. Бирбраер рекомендует принимать величину ускорения нулевого периода $f = 33$ Гц [2]. Условимся использовать указанное значение как некий эталон, учитывая в расчетах на удаление элементов только частоты собственных колебаний ниже этого значения.

Тем не менее, простое «срезание» высших частот не упрощает поиск векторов постоянных интегрирования, в любом случае приходится решать целую систему уравнений с учетом всех динамических степеней свободы. В работе [5] предложено использовать метод конденсации масс, что приводит с некоторой погрешности в связи с отбрасыванием некоторого количества масс. По мнению автора статьи, для решения задачи удобней использовать представление в обобщенных координатах [10], при этом:

• приведенная матрица масс:

$$[\tilde{M}] = [Ynorm]^T \cdot [M] \cdot [Ynorm],$$

где $[Ynorm]$ – матрица, составленная из собственных векторов системы. После приведения вычеркиваются столбцы и строки больше p, где p – число учитываемых форм (частотой ниже 33 Гц);

• вектор начальных перемещений системы:

$$\{\tilde{U}\} = \left[\tilde{M}_{33}\right]^{-1} \cdot [Ynorm]^T \cdot [M] \cdot \{U(t_{\text{обр}}^{n-1})\},$$

где $\left[\tilde{M}_{33}\right]$ – матрица размерностью pхp (где p – число учитываемых форм), составленная из $[\tilde{M}]$ вычеркиванием лишних строк/столбцов;

• вектор начальных скоростей системы:

$$\{\tilde{V}\} = \left[\tilde{M}_{33}\right]^{-1} \cdot [Ynorm]^T \cdot [M] \cdot \{V(t_{\text{обр}}^{n-1})\};$$

• вектор узловых нагрузок:

$$\{\tilde{F}\} = [Ynorm]^T \cdot \{F\}.$$

После подобных преобразований громоздкий член $\frac{1}{\omega_i^2} \cdot \frac{\sum_{j=1}^{J} F_j \cdot y_{ij}}{\sum_{j=1}^{J} M_j \cdot y_{ij}^2}$, входящий в каждое уравнение системы поиска постоянных $\{B\}$, представляющий разложение внешней нагрузки по всем формам, заменяется на $\frac{1}{\omega_i^2} \times \times \frac{\{\tilde{F}\}_i}{\left[\tilde{M}_{33}\right]_i}$, а получаемые вектора $\{A\}$ и $\{B\}$ имеют нужную размерность p.

Следует также отметить возможность еще упростить задачу, решая не полную задачу о собственных значениях, а частичную (например, с помощью метода Релея – Ритца или Лоренца), но в используемой автором расчетной среде (MathCad Prime 2.0), поиск решения полной задачи даже для больших систем не представляет труда.

Критерий перехода на новую стадию обрушения

Для каждого временно́го шага порядка 10^{-4} с напряжения сопоставляются с критическими (с потерей устойчивости) и текучести (границей применимости линейного динамического расчета).

По достижении предела текучести дальнейший расчет ведется одним из методов явного численного интегрирования при переменной матрице жесткости:

$$[K] = f(\{U\}, \{\varepsilon_{\max}\}, Gis),$$

где $\{\varepsilon_{\max}\}$ – вектор максимальных относительных перемещений, достигнутых каждым элементом (для линейно упрочняющегося материала); Gis – переменная учета характера изменения напряжений в каждом элементе (разгрузка/нагрузка).

Способы численного интегрирования широко отражены в литературе [1, 8] и в статье не приводятся.

По достижении критических напряжений в одном (или одновременно в нескольких элементах) предлагается вводить переменную ζ, учитывающую снижение несущей способности элемента, потерявшего устойчивость. Величину этой переменной рекомендуется принимать в пределах $\zeta = 0...0{,}125$. Выбор такого диапазона связан со знакомыми автору экспериментами по нагружению металлических труб [11], приводящему к потере их общей устойчивости.

Об эффекте снижения размаха колебаний

Практическая значимость использования спектрального анализа металлических систем связана также с обнаруженным в процессе исследований эффектом снижения размаха колебаний при последовательном выключении элементов в движущейся системе. Автор связывает этот эффект с разнонаправленностью ускорений, вызываемых очередным обрывом (ускорение всегда направлено вниз) и инерционным ускорением движущейся массы (направление зависит от момента очередного выключения связи/элемента). Подобный эффект позволяет иначе взглянуть на стойкость даже упругих систем к прогрессирующему обрушению без задействования пластического резерва. Схожий эффект описан в [12], но в указанной работе он связывался с фазой внешней периодической нагрузки.

Выводы

1. Описано применение спектрально-численного метода расчета конструкций на внезапное изъятие элемента или связи, заключающееся в использовании точного решения (разложения по формам колебаний) на стадии упругой работы материала и прямого численного интегрирования уравнений движения по методу переменной жесткости по достижении предела текучести в одном из элементов.

2. Для сокращения вычислений и ускорения поиска постоянных интегрирования на каждой стадии предлагается ограничивать спектр учитываемых частот собственных колебаний по аналогии с использованием величины ускорения нулевого периода из теории расчета на сейсмостойкость.

3. Использование обобщенных координат решает проблему ограничения искомых векторов, состоящих из постоянных интегрирования по каждой из частот, не требуя при этом исключения реальных масс.

4. По достижении критических напряжений предлагается не изымать потерявший устойчивость элемент, а лишь уменьшать его жесткость введением поправочного коэффициента.

5. Эффект возможного снижения размаха колебаний на каждой стадии обрушения позволяет говорить о способности систем сопротивляться последовательному удалению элементов без задействования пластического ресурса.

Библиографический список

1. Белостоцкий А. М. Численное моделирование процессов деформирования конструкций, подверженных аварийным воздействиям / А. М. Белостоцкий, А. С. Павлов // Строительство и реконструкция. – 2015. – № 2 (58). – С. 51–55.

2. Бирбраер А. Н. Расчет конструкций на сейсмостойкость / А. Н. Бирбраер. – СПб. : Наука, 1998. – 255 с.

3. Бондарев Ю. В. О начальных условиях при расчете конструктивно нелинейных стержневых систем на удаление связей и элементов / Ю. В. Бондарев, И. С. Талантов // Актуальные проблемы строительства : материалы междунар. науч.-практич. конф. студентов, аспирантов, молодых ученых и докторантов / СПбГАСУ. – СПб., 2015.

4. Бондарев Ю. В. Подходы к решению задачи о внезапном удалении элементов из стержневой

системы / Ю. В. Бондарев, И. С. Талантов // Вестн. гражданских инженеров. – 2014. – № 2 (43). – С. 48–52.

5. Бондарев Ю. В. Расчет стержневых систем при внезапном удалении отдельных элементов / Ю. В. Бондарев, Нгуиен Тханх Суан // Строительная механика и расчет сооружений. – 2010. – № 4. – С. 43–48.

6. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем / А. С. Вольмир. – М. : Наука, 1967. – 984 с.

7. ГОСТ Р 54257-2010 «Национальный стандарт Российской Федерации. Надежность строительных конструкций и оснований. Основные положения и требования» / ФГУП «НИЦ «Строительство». Введ. 2010-12-23. – М. : Стандартинформ, 2011.

8. Ильин В. П. Численные методы решения задач строительной механики / В. П. Ильин, В. В. Карпов, А. М. Масленников. - М. : АВС ; СПб. : Изд-во СПбГАСУ, 2005. – 425 с.

9. Илюшин А. А. Сопротивление материалов / А. А. Илюшин, В. С. Ленский. – М. : Физматлит, 1959. – 373 с.

10. Клаф Р. Динамика сооружений / Р. Клаф, Дж. Пензиен ; пер. с англ. – М. : Стройиздат, 1979. – 320 с.

11. Литвинский Г. Г. Экспериментальные исследования потери устойчивости несущих элементов крепи из коробчатого профиля / Г. Г. Литвинский // Сб. науч. трудов ДонГТУ. – 2013. – № 40. – С. 8–13.

12. Петров И. А. Расчет двухпролетной неразрезной балки с выключающейся связью / И. А. Петров // Вестн. МГСУ. – 2012. – № 9. – С. 148–155.

References

1. Belostotskiy A. M. & Pavlov A. S. *Stroitelstvo i reconstruktsiya – Constr. and Reconstr.*, 2015, no. 2 (58), pp. 51-55.

2. Birbrayer A. N. Raschet konstruktsiy na seysmostoykost [Calculation of Construction Elements' Seismic Stability]. St. Petersburg, Nauka, 1998. 255 p.

3. Bondarev Yu. V. & Talantov I. S. O nachalnykh usloviyakh pri raschete konstruktivno nelineynykh sterzhnevykh sistem na udaleniye svyazey i elementov [On Initial Conditions for Calculation of Non-linear Frame Structures for Eliminations of Communications and Elements]. *Aktualnyye problemy stroitelstva: materialy mezhdunar. nauch.-praktich. konf. studentov, aspirantov, molodykh uchenykh i doktorantov; SPbGASU* (Current Construction Problems: Proc. of Intl. Sci. and Res. Conf. of Students, Postgraduates and Young Researchers; Saint-Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering). St. Petersburg, 2015.

4. Bondarev Yu. V. & Talantov I. S. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov – Civil Eng. Bull.*, 2014, no. 2 (43), pp. 48-52.

5. Bondarev Yu. V. & Nguiyen Tkhankh Suan. *Stroitelnaya mekhanika i raschet sooruzheniy – Structural Mechanics and Structural Analysis*, 2010, no. 4, pp. 43-48.

6. Volmir A. S. Ustoychivost deformiruyemykh sistem [Stability of Deformable Systems]. Moscow, Nauka, 1967. 984 p.

7. GOST R 54257-2010 Natsionalnyy standart Rossiyskoy Federatsii. Nadezhnost stroitelnykh konstruktsiy i osnovaniy. Osnovnyye polozheniya i trebovaniya [Russian Federation National Standard. Safety of Construction Structures and Foundations. Basic Premises and Requirements]; FGUP NITs Stroitelstvo. Intr. 23.12.2010. Moscow, Standartinform, 2011.

8. Ilyin V. P., Karpov V. V. & Maslennikov A. M. Numerical Methods for Solving Structural Mechanic Problems. Moscow, ABC; St Petersburg, SPbGASU, 2005. 425 p.

9. Ilyushin A. A. & Lenskiy V. S. Soprotivleniye materialov [Strength of Materials]. Moscow, Fizmatlit, 1959. 373 p.

10. Klaf R. & Penziyen D. Dinamika sooruzheniy [Scructural Dynamics]. Moscow, Stroyizdat, 1979. 320 p.

11. Litvinskiy G. G. *Sbornik nauchnykh trudov DonGTU – Proc. Donbas State Technical Univ.*, 2013, no. 40, pp. 8-13.

12. Petrov I. A. *Vestnik MGSU – Bull. of the Moscow State Univ. of Civil Eng.*, 2012, no. 9, pp. 148-155.

ТАЛАНТОВ Иван Сергеевич – аспирант, i.talantov@yandex.ru (Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет).