

УДК 629.4.015:625.1.03

С. В. Кротов, Д. П. Кононов**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРТИКАЛЬНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИЛ,
ДЕЙСТВУЮЩИХ НА КОЛЕСО В КОНТАКТЕ С РЕЛЬСОМ**

Дата поступления: 30.06.2015

Решение о публикации: 16.09.2015

Цель: Найти параметры динамического взаимодействия колеса с рельсом более доступным методом, чем при использовании расчётных комплексов. **Методы:** Создание расчетной модели, в которой предполагается, что колесо движется по упругой весомерной балке, лежащей на винклеровском основании с линейной диссипацией, при этом рассматривается движение одного колеса. Изучение совместных колебаний дискретной линейной динамической системы (экипажа), состоящей из двух подрессоренных масс и двигающихся по балке (пути), лежащей на упругом основании и имеющей детерминированные геометрические неровности. **Результаты:** Приведены особенности методики определения параметров взаимодействия при динамическом контакте. Рассмотрены основные положения известной теории, позволяющие без значительных расчетных усилий перейти к определению прогибов и усилий в контакте колеса и рельса, а также приведены основные этапы решения. Приведён алгоритм расчёта, который позволяет оценить влияние неровностей – дефектов колеса и рельса – на путь и экипаж, а также результаты динамического расчета вертикального взаимодействия колеса и рельса. Некоторые результаты расчетов оформлены в виде графиков. **Практическая значимость:** Изложенный метод расчета позволяет оценить влияние неровностей – дефектов колеса и рельса – на путь и экипаж. Так как данный метод реализован на ЭВМ, динамический расчет параметров взаимодействия, из которых наибольший интерес вызывают вертикальные силы, будет представлять формальную операцию по вводу исходных данных для расчета. Пользуясь полученными графиками для заданных параметров, можно выполнять расчеты для разных частот и амплитуд возмущения.

Динамическое взаимодействие, частотная характеристика, прогиб рельса, перемещение колеса, вертикальная сила.

Sergey V. Krotov, Cand. Sci. (Eng.), associate professor, svk-19587@yandex.ru (Rostov State Transport University); ***Dmitriy P. Kononov**, Cand. Sci. (Eng.), associate professor, d_kononov@mail.ru (Petersburg State Transport University) DETERMINATION OF VERTICAL DYNAMIC FORCES ACTING ON THE WHEEL IN CONTACT WITH A RAIL

Objective: To discover parameters of dynamic interaction between a wheel and a rail by a more accessible method than using calculation systems. **Methods:** Creating a calculation model in which it is assumed that a wheel is moving on an elastic beam possessing weight lying on a Winkler foundation with line dissipation, with movement of a single wheel considered. Study of coupled vibrations of a discrete linear dynamic system (vehicle) which consists of two spring weights and moves along a beam (track), lying on elastic base and possessing determined geometrical uneven surfaces. **Results:** The paper lists specific features of a method for determining interaction parameters in case of dynamic contact. It looks at basic premises of a known theory which allow to determine deflection and strain in contact between a wheel and a rail without significant calculation efforts, and provides main stages of a solution. A calculation algorithm which allows to evaluate the influence of uneven surfaces (wheel and rail defects) on track and vehicle, as well as results of dynamic calculation of vertical interaction between a wheel and a rail.

Some calculation results are presented in chart form. **Practical importance:** The calculation method described in the paper allows to evaluate the influence of uneven surfaces – wheel and rail defects – on track and vehicle. As this method is computer-based, dynamic calculation of interaction parameters, of which vertical forces are most interesting, is to be a formal operation of input of basic data for calculation. Using resulting charts for set parameters allows to conduct calculations for various frequencies and ranges of disturbance.

Dynamic interaction, frequency response, rail deflection, wheel movement, vertical force.

Численное моделирование сил, возникающих в контакте колесо – рельс, значительно развито. Лидерами в этой области являются программные продукты Vampire (Великобритания), Nucars (США). Комплекс Medyna (Германия) применялся для оценки динамических характеристик скоростного поезда «Сокол» (ПГУПС). Широко используется расчетный комплекс Adams/Rail: он обеспечивает как линейное моделирование без учета реальных профилей колес и рельсов, так и использование нелинейной теории контакта. В нашей стране успешно работают «Дионис» (МИИТ), «Универсальный механизм» (БГТУ), с помощью которых проводили исследования тепловозов, электровозов, вагонов и др. Это мощные инструменты анализа динамики механических систем, требующие высокого уровня подготовки специалистов. Они имеют высокую стоимость и предназначены для комплексных исследований, не всегда применимы для инженерных расчетов или для учебных задач. Рассмотрим возможность нахождения параметров динамического взаимодействия более доступным методом.

Основные допущения.

Постановка задачи

В расчетной модели (рис. 1) предполагается, что колесо движется по упругой весомой балке, лежащей на винклеровском основании с линейной диссипацией. При изучении динамических взаимодействий рассмотрим движение одного колеса. Поскольку рельс опирается на сплошное упругое основание, можно распространить выводы и на действие

системы грузов. Общий ход исследования покажем на примере действия на рельс системы из двух грузов.

На основе работ [1–3] рассмотрим совместные колебания дискретной линейной динамической системы (экипажа) из двух подрессоренных масс m_1 и m_0 ,двигающихся по балке (пути), лежащей на упругом основании и имеющей детерминированные геометрические неровности $\xi(x_i)$. Цель работы – получить значения динамических усилий и перемещений в контакте колеса и рельса.

Условные обозначения:

x_1 – абсцисса текущего сечения рельса, отсчитываемая от некоторого неподвижного начала координат;

$y(x_0, t)$ – динамический прогиб рельса в вертикальной плоскости;

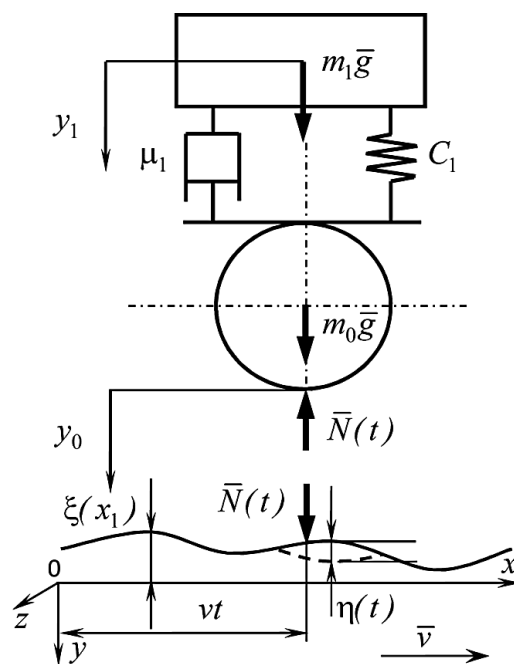


Рис. 1. Расчетная схема взаимодействия

$y_0(t)$ – вертикальное перемещение рельса;
 $y_1(t)$ – вертикальное перемещение подрессоренной массы;

EI – жесткость рельса;

C – коэффициент жесткости подрельсового основания;

C_k – коэффициент жесткости в точке контакта колеса и рельса;

C_1 – коэффициент жесткости рессорного подвешивания;

μ – распределенный коэффициент демпфирования;

μ_1 – коэффициент демпфирования рессорного подвешивания;

ρ – распределенная масса рельса (приходящаяся на единицу длины);

m_0 – приведенная неподдресоренная масса листа;

m_1 – подрессоренная масса;

$N(t)$ – динамическая вертикальная сила в точке контакта колеса и рельса;

$\xi(x_1)$ – неровности рельса и колеса;

$\eta(t)$ – деформация в контакте, вызванная действием вектора;

v – постоянная скорость поступательного движения колеса относительно рельса (скорость вагона);

t – время.

Основные этапы решения

Динамический прогиб рельса в точке контакта связан с соответствующими смещениями колес следующим равенством:

$$y(vt, t) = y_0(t) + \xi(v, t) - \eta(t). \quad (1)$$

Деформацию в точке контакта колеса и рельса $\eta(t)$ (рис. 1) можно определить соотношением динамической вертикальной силы в точке контакта $N(t)$ и жесткости в точке контакта C_k :

$$\eta(t) = \frac{N(t)}{C_k}. \quad (2)$$

Неровность $\xi(v, t)$ представляет собой сумму неровностей пути $\xi_{\text{п}}(v, t)$, колеса $\xi_{\text{к}}(v, t)$ и вертикального перемещения колеса относительно рельса $\xi_{\text{в}}(v, t)$. Неровность пути $\xi_{\text{п}}(v, t)$ представляет собой разность неровности поверхности катания рельса $\xi_{\text{р}}(v, t)$ и неровности, обусловленной наличием люфта между рельсом и основанием $\xi_{\text{л}}(v, t)$. Таким образом, неровность равна

$$\xi(v, t) = \xi_{\text{р}}(v, t) - \xi_{\text{л}}(v, t) + \xi_{\text{к}}(v, t) + \xi_{\text{в}}(v, t).$$

Из равенств (1) и (2) выражаем динамическую вертикальную силу в точке контакта колеса с рельсом:

$$N(t) = C_k [y_0(t) - y(vt, t) + \xi(v, t)].$$

Уравнение колебаний балки, лежащей на упругом винклеровском основании с линейной диссипацией и нагруженной сосредоточенной силой $N(t)$, относительно неподвижной системы координат имеет вид

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho \frac{\partial^4 y}{\partial t^4} + \mu \frac{\partial y}{\partial t} + cy = 0 \quad (3)$$

и справедливо всюду, кроме точки $x_1 = vt$, где приложена сила $N(t)$, которая определяется с учетом движения дискретной системы:

$$m_0 \ddot{y}_0 - \mu_1 (\dot{y}_1 - \dot{y}_0) - c_1 (y_1 - y_0) + N = 0; \quad (4)$$

$$m_1 \ddot{y}_1 - \mu_1 (\dot{y}_1 - \dot{y}_0) - c_1 (y_1 - y_0) = 0. \quad (5)$$

При определении условия интегрирования уравнений (4) и (5) и переходе к поступательно движущейся системе координат (x, y) , т. е. с вводом новой переменной $x = x_1 - vt$, уравнение (3) примет вид:

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho \left(v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) - 2v \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} + \mu \left(\frac{\partial y}{\partial t} - v \frac{\partial y}{\partial x} \right) + cy = 0. \quad (6)$$

Решение уравнения (6) будем искать в виде [1–3]

$$y(x, t) = \varphi(x)e^{i\omega t}. \quad (7)$$

Подстановка этого выражения в уравнение (6) дает следующее дифференциальное уравнение, откуда определяется функция $\varphi(x)$ [4]:

$$\begin{aligned} \varphi'''' + \frac{\rho v^2}{EI} \varphi'' - \left(\frac{\mu v}{EI} + \frac{2\rho v \omega}{EI} i \right) \varphi' + \\ + \frac{c - \rho \omega^2}{EI} + \frac{\mu \omega}{EI} i = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Характеристическое уравнение дифференциального уравнения (8) имеет вид [4]

$$\begin{aligned} r^4 + \frac{\rho v^2}{EI} r^2 - \left(\frac{\mu v}{EI} + \frac{2\rho v \omega}{EI} i \right) r + \\ + \frac{c - \rho \omega^2}{EI} + \frac{\mu \omega}{EI} i = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Это уравнение имеет четыре комплексных корня $r_j = \alpha_j + i\beta_j$ ($j = 1, 2, 3, 4$), таким образом, его решение имеет вид [1, 3]

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^4 C_j e^{r_j x}, \quad (10)$$

где C_j – постоянные. Подставив полученное решение в уравнение (7), получим следующее выражение для функции $y(x, t)$ при частоте ω [1, 3]:

$$y(x, t) = \sum_{j=1}^4 C_j e^{r_j x + i\omega t}. \quad (11)$$

Уравнение (10) справедливо только для полубесконечных балок, простирающихся влево и вправо от движущейся силы.

Принимаем, что корни r_1 и r_3 имеют отрицательную вещественную часть, а корни r_2 и r_4 – положительную [1, 3]. Тогда решение уравнений (11) с учетом граничных условий на бесконечности будет выглядеть так:

$$y_+(x, t) = e^{i\omega t} (C_1 e^{r_1 x} + C_3 e^{r_3 x});$$

$$y_-(x, t) = e^{i\omega t} (C_2 e^{r_2 x} + C_4 e^{r_4 x}).$$

Через $y_+(x, t)$ обозначено решение задачи, удовлетворяющее физическим условиям задачи при $x > 0$, а через $y_-(x, t)$ – при $x < 0$. Величина коэффициентов C_j ($j = 1, 2, 3, 4$) подбирается, чтобы удовлетворить соответствующим граничным условиям. Предположим, что сила, действующая на рельс, описывается уравнением

$$N(t) = N_0 e^{i\omega t},$$

где N_0 – комплексная величина. Тогда система уравнений, которая получается из условия интегрирования уравнения (6) для определения коэффициентов C_j , имеет вид

$$\begin{aligned} C_1 - C_2 + C_3 - C_4 &= 0; \\ C_1 r_1 - C_2 r_2 + C_3 r_3 - C_4 r_4 &= 0; \\ C_1 r_1^2 - C_2 r_2^2 + C_3 r_3^2 - C_4 r_4^2 &= 0; \\ C_1 r_1^3 - C_2 r_2^3 + C_3 r_3^3 - C_4 r_4^3 &= 0. \end{aligned}$$

Эта система может быть записана в векторно-матричной форме $H \cdot C = F$, где H – матрица с комплексными элементами размерности 4×4 [3]. Определяя коэффициенты C_j [4], можно получить комплексные выражения для прогибов рельса слева и справа от подвижной нагрузки в виде

$$\begin{aligned} y_+(x, t) &= \frac{N(t)}{\Delta EI} [M_{41} e^{r_1 x} + M_{43} e^{r_3 x}]; \\ y_-(x, t) &= \frac{N(t)}{\Delta EI} [M_{42} e^{r_2 x} + M_{44} e^{r_4 x}], \end{aligned}$$

где Δ – определитель, составленный из элементов матрицы H , а величины r_j являются непрерывными функциями частоты ω .

После определения функции $y(x, t)$, где x – параметр, учитывая воздействие $N(t)$, частотную характеристику $W_y(x, i\omega)$ можно записать в виде

$$W_{y_+}(x, i\omega) = \frac{1}{\Delta EI} [M_{41}e^{r_1x} + M_{43}e^{r_3x}];$$

$$W_{y_-}(x, i\omega) = \frac{1}{\Delta EI} [M_{42}e^{r_2x} + M_{44}e^{r_4x}].$$

Решение для прогиба рельса в сечении x при воздействии на систему силы $N(t)$, изменяющейся по закону $N_0 e^{i\omega t}$ и движущейся со скоростью v , теперь запишется так:

$$y_+(x, t) = W_{y_+}(x, i\omega)N(t). \quad (12)$$

Применяя к уравнениям (4), (5) преобразование Лапласа и считая начальные условия нулевыми, приходим к следующим алгебраическим уравнениям:

$$(m_0 S^2 + \mu_1 S + C_1)\bar{y}_0 - (\mu_1 S + C_1)\bar{y}_1 = -N; \quad (13)$$

$$(m_1 S^2 + \mu_1 S + C_1)\bar{y}_1 - (\mu_1 S + C_1)\bar{y}_0 = 0, \quad (14)$$

где $\bar{y}_0 = \int_0^{\infty} e^{-st} y_0(t) dt$; $\bar{y}_1 = \int_0^{\infty} e^{-st} y_1(t) dt$;
 $\bar{N} = \int_0^{\infty} e^{-st} N(t) dt$.

Исключая \bar{y}_1 из системы уравнений (13) и (14), решая их относительно \bar{y}_0 , получим передаточную функцию, связывающую вертикальное перемещение колеса с динамической силой в точке колеса и рельса, которая является частотной характеристикой при замене переменной S на $i\omega$:

$$W_0(i\omega) = \frac{(m_1 \omega^2 - C_1) - i\mu\omega}{[m_1 m_0 \omega^4 - C_1(m_1 + m_0)\omega^2] - i\mu_1(m_1 + m_0)\omega^3}.$$

Следовательно,

$$y_0(x, t) = W_0(i\omega)N(t). \quad (15)$$

Вертикальное смещение определится из равенства (1):

$$y_0(t) = y(0, t) - \xi(vt) + \frac{1}{C_k} N(t). \quad (16)$$

Принимаем синусоидальную неровность $\xi = \xi_0 e^{i\omega t}$ и, решая совместно (12), (15), (16), получаем

$$N(t) = W_N(i\omega)\xi(vt),$$

где частотная характеристика определяется выражением

$$W_N(i\omega) = \frac{1}{\frac{1}{C_k} + W_{y_+}(0, i\omega) - W_0(i\omega)}.$$

Из (12) получим

$$y_+(0, t) = W_{y_+N}(i\omega)\xi(vt),$$

а для прогиба в сечении $x = 0$

$$y_0(t) = W_{y_0N}(i\omega)\xi(vt).$$

После вычисления амплитудно-частотных и фазово-частотных характеристик можно получить решение в вещественном виде $y(0, t)$, $y_0(t)$, $N(t)$, если задать гармоническое возмущение $\xi(vt)$ в виде $\xi = \xi_0 \cos \omega t$, где ξ_0 – половина глубины неровности. Решения имеют вид:

$$y(0, t) = \xi_0 |W_{y_+N}(i\omega)| \cos[\omega t + \arg W_{y_+N}(i\omega)];$$

$$y_0(t) = \xi_0 |W_{y_0N}(i\omega)| \cos[\omega t + \arg W_{y_0N}(i\omega)];$$

$$N(t) = \xi_0 |W_N(i\omega)| \cos[\omega t + \arg W_N(i\omega)].$$

Амплитудные значения имеют вид

$$y_{\max}(0, t) = \xi_0 |W_{y_+N}(i\omega)|; \quad (17)$$

$$y_0^{\max}(t) = \xi_0 |W_{y_0N}(i\omega)|; \quad (18)$$

$$N_{\max}(t) = \xi_0 |W_N(i\omega)|. \quad (19)$$

Результаты решения

Таким образом, можно предложить следующий алгоритм динамического расчета вертикального взаимодействия колеса и рельса.

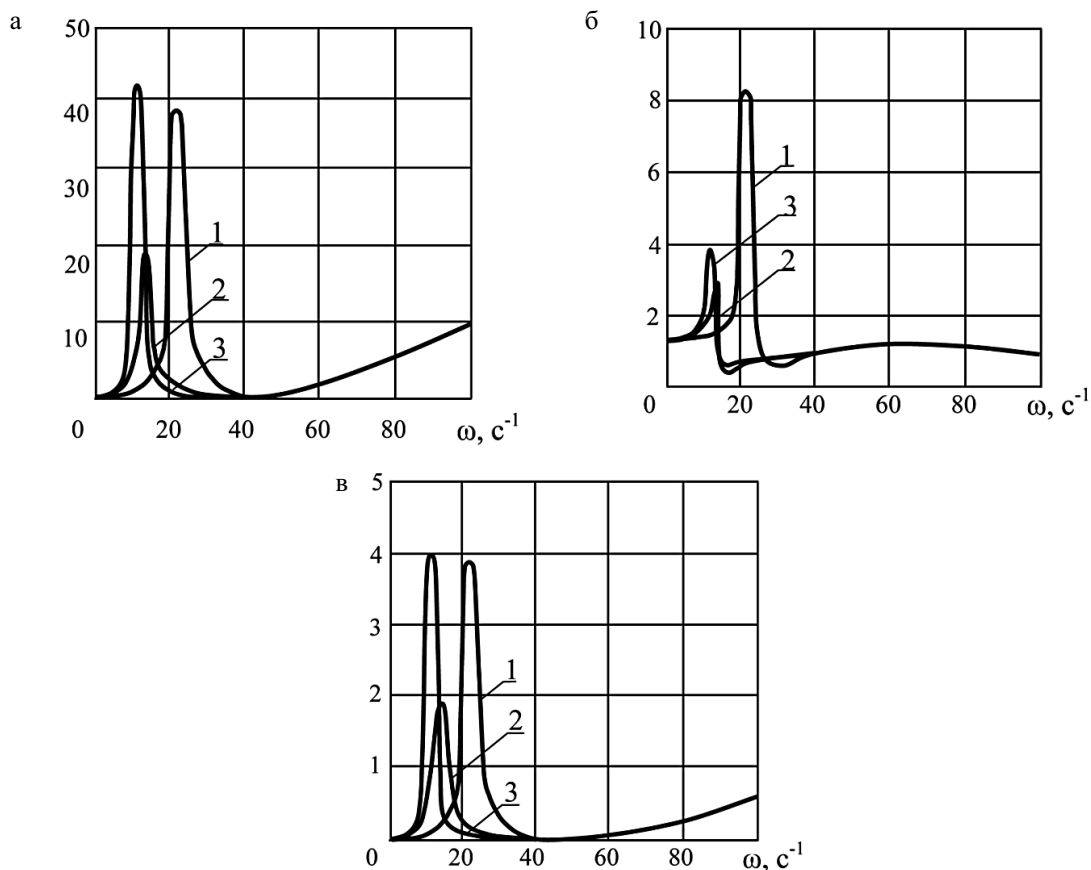


Рис. 2. Модуль частотной характеристики:
 а) $W_N(i\omega)$, МН/м; б) $W_{y_{qN}}(i\omega)$, МН/м; в) $W_{y_{vN}}(i\omega)$, МН/м

1) Задать значения параметров $\rho, c, \mu, EI, \nu, \omega, m_0, m, C_k, C, \mu_1, \xi_0$.

2) Вычислить коэффициенты уравнения (9): $r^4 + pr^2 + qr + l = 0$, где

$$p = \frac{\rho\nu^2}{EI}; \quad q = -\frac{\mu\nu + 2\rho\nu\omega i}{EI};$$

$$l = \frac{c - \rho\omega^2 + \mu\omega i}{EI}.$$

3) Решить уравнение (9) и найти корни уравнения $r_1 - r_4$, группируя их так, чтобы r_1 и r_3 имели отрицательную действительную часть, а r_2 и r_4 – положительную.

4) Вычислить миноры определителя $M_{41}, M_{42}, M_{43}, M_{44}$ и значение определителя Δ .

5) Вычислить передаточные функции W .

6) Вычислить амплитудно-частотные характеристики.

7) Вычислить фазово-частотные характеристики.

8) Вычислить амплитудные значения $y_{\max}, y_0^{\max}, N_{\max}$.

9) Изменить значение ω и повторить цикл вычислений.

Для этого используется язык программирования Fortran, содержащий огромное количество пакетов: для решения интегральных уравнений, перемножения матриц и другие.

Некоторые результаты расчетов оформлены в виде графиков на рис. 2 (приведены модули частотных характеристик; на всех графиках кривая 1 соответствует $m_1 = 40$ кН, 2 – $m_2 = 80$ кН, 3 – $m_3 = 120$ кН).

Пользуясь графиками для заданных параметров, можно выполнять расчеты для разных частот ω и амплитуд ξ_0 возмущения.

Пусть $\omega = 100 \text{ c}^{-1}$ и $\xi_0 = 0,001 \text{ м}$. По графикам определяем

$$|W_N(i\omega)| = 9,84 \frac{\text{МН}}{\text{М}}; |W_{y_N}(i\omega)| = 0,618 \frac{\text{М}}{\text{М}};$$

$$|W_{y_0 N}(i\omega)| = 0,985 \frac{\text{М}}{\text{М}}.$$

По формулам (17)–(19) получим амплитудные значения величин: прогиб рельса y_{\max} , перемещение колеса y_0^{\max} , вертикальную силу в точке контакта колеса и рельса N_{\max} :

$$y_{\max} = 0,618 \text{ мм}; y_0^{\max} = 0,985 \text{ мм};$$

$$N_{\max} = 9,84 \text{ кН}.$$

Заключение

Изложенный метод расчета позволяет оценить влияние неровностей – дефектов колеса и рельса – на путь и экипаж. Так как данный метод реализован на ЭВМ, динамический расчет параметров взаимодействия, из которых наибольший интерес представляют вертикальные силы, будет представлять формальную операцию по вводу исходных данных для расчета.

Библиографический список

1. Коган А. Я. Вертикальные динамические силы, действующие на путь / А. Я. Коган // Тр. ВНИИЖТ. – 1997. – Вып. 402. – 205 с.

2. Коган А. Я. Взаимодействие колеса и рельса при качении / А. Я. Коган // Вестн. ВНИИЖТ. – 2004. – № 5. – С. 33–40.

3. Коган А. Я. Динамика пути и его взаимодействие с подвижным составом / А. Я. Коган. – М. : Транспорт, 1997. – 326 с.

4. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – 4-е изд. – М. : Наука, 1977. – 832 с.

References

1. Kogan A. *Trudy VNIIZhT – Proc. of the Railway Res. Inst.*, 1997, vol. 402. 205 p.

2. Kogan A. *Vestnik VNIIZhT – Bull. of the Railway Res. Inst.*, 2004, no. 5, pp. 33–40.

3. Kogan A. *Dinamika puti i yego vzaimodeystviye s podvizhnym sostavom* [Track Dynamics and its Interaction with Rolling Stock]. Moscow, Transport, 1997. 326 p.

4. Korn G. & Korn T. *Spravochnik po matematike dlya nauchnykh rabotnikov i inzhenerov* [Mathematical Handbook for Scientists and Engineers]. Is. 4. Moscow, Nauka, 1977. 832 p.

КРОТОВ Сергей Викторович – канд. техн. наук, доцент (Ростовский государственный университет путей сообщения), svk-19587@yandex.ru;
*КОНОНОВ Дмитрий Павлович – канд. техн. наук, доцент, d_kononov@mail.ru (Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I),