

УДК 62-272.2

А. В. Гусев, А. М. Орлова, Е. А. Рудакова

АНАЛИЗ МЕТОДОВ РАСЧЕТА ВИНТОВЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПРУЖИН НА УСТОЙЧИВОСТЬ ПРИ СЖАТИИ

Дата поступления: 05.08.2015

Решение о публикации: 15.10.2015

Цель: Увеличение высоты пружин в свободном состоянии может привести к потере их устойчивости при сжатии, поэтому целью работы является анализ методов оценки устойчивости пружины при сжатии на примере пружины с увеличенным статическим прогибом: по Нормам, аналитически и методом конечных элементов. **Методы:** В статье приведены метод оценки устойчивости пружин по Нормам, аналитически и метод конечных элементов. **Результаты:** В результате исследования выяснено, что аналитический метод расчета пружин на устойчивость дает менее жесткие требования по условию устойчивости, чем Нормы, а метод конечных элементов при расчете пружины на устойчивость позволил определить формы потери устойчивости пружины и соответствующие им величины нагрузок. Для всех рассмотренных случаев закрепления получены силы, которые приводят пружину к изгибной и радиальной формам потери устойчивости. Данные силы превосходят значение нагрузки F_{\max} , приводящей к смыканию рабочих витков пружины, на величину от 15 до 46%, что подтверждает наличие у пружины достаточного запаса устойчивости. **Практическая значимость:** По результатам анализа методов расчета пружины на устойчивость предлагается использовать комплексный подход к расчету пружины на устойчивость, включающий проверку устойчивости пружины по Нормам, аналитический метод расчета и метод конечных элементов в том случае, если геометрические параметры пружины влияют на превышение нормированного значения отношения высоты ненагруженной пружины к ее среднему диаметру.

Устойчивость пружины, статический прогиб пружины, аналитический метод, оценка устойчивости, метод конечных элементов, формы потери устойчивости.

***Artem V. Gusev**, postgraduate student, agusev@tt-center.ru (Petersburg State Transport University); **Anna M. Orlova**, D. Eng., professor, deputy director general in charge of scientific and technical development, aorlova@uniwagon.com (Research and Production Corporation "United Wagon Company"); **Yekaterina A. Rudakova**, Cand. Sci. (Eng.), dynamic analysis department head, lead researcher, erudakova@tt-center.ru (Transport Technologies Centre (VNIITsTT) ANALYSIS OF METHODS OF CALCULATION FOR COIL SPRINGS BUCKLING UNDER COMPRESSION

Objective: Increasing the height of springs in a free condition can lead them to lose stability when compressed, thus the paper's purpose is to analyse the methods of evaluation of spring stability under compression on the example of spring with increased static deflection. **Methods:** The paper presents methods for evaluating the spring's stability by norms, analytically and by finite elements method. **Results:** The study established that analytical calculation method for spring stability results in less strict requirements for stability condition compared to norms, and finite elements method in calculation of spring stability allowed to determine forms of stability loss and corresponding load rates. For all considered cases of fixation forces that lead a spring to bending and radial forms of stability loss were established. These forces exceed the F_{\max} load volume which leads to closing of working coil by between

15 and 46 per cent, which confirms that the spring has sufficient stability margin. **Practical importance:** By results of analysis of methods of calculation of spring stability, complex approach is recommended for calculation of spring stability, including spring stability check by norms, analytical calculation method and finite elements method in case spring's geometrical parameters lead to exceeding the normal value of the unloaded spring height to its average diameter ratio.

Spring stability, spring static deflection, analytical method, stability evaluation, finite elements method, forms of loss of stability.

В соответствии с «Нормами для расчета и проектирования вагонов железных дорог МПС колеи 1520 мм (несамоходных)» (далее – Нормы) [5], одним из способов снижения динамических нагрузок на путь и вагон является увеличение статического прогиба подвешивания. При этом в соответствии с требованиями ГОСТ 9246-2013 [3] должен быть достаточный коэффициент запаса прогиба подвешивания. Из-за этих обстоятельств неизбежно увеличивается высота пружин рессорного подвешивания, тогда как их диаметр ограничен базой тележки.

Увеличение высоты пружин в свободном состоянии может привести к потере их устойчивости при сжатии. В связи с этим актуальным становится совершенствование методов расчета устойчивости пружин при сжатии. В статье приведены обзор и анализ известных методов, сравнение результатов на примере пружины с увеличенным статическим прогибом.

Метод оценки устойчивости пружин по Нормам

На вновь проектируемые и модернизируемые самоходные вагоны колеи 1520 мм в СССР распространялись Нормы от 1971 и 1983 гг. [6, 7]. В них сказано, что для обеспечения устойчивости пружин круглого сечения, работающих на сжатие, отношение высоты ненагруженной пружины H_0 к ее среднему диаметру D должно быть:

- при шарнирном закреплении опорных витков $\frac{H_0}{D} \leq 1,75$;

- при жестком закреплении опорных витков $\frac{H_0}{D} \leq 3,5$.

В Нормам 1996 г., актуальных на данный момент, дополнительно к условию устойчивости указана формула для определения критического значения отношения $\left(\frac{H_0}{D}\right)_{\text{крит}}$:

$$\left(\frac{H_0}{D}\right)_{\text{крит}} = \sqrt{\eta \frac{2 - \frac{1}{1+\mu}}{1 + \frac{1}{1+\mu}}},$$

где η – коэффициент, зависящий от характера закрепления опорных витков пружины; μ – коэффициент Пуассона.

Также в Нормам 1996 г. отмечено, что с учетом технологических неточностей изготовления и сложного характера эксплуатационной нагруженности пружин рессорного подвешивания вагонов при проектировании следует предусматривать достаточный запас устойчивости пружин, после которого только указаны условия $H_0/D \leq 1,75$ и $\leq 3,5$.

Так как увеличение высоты пружины может привести к превышению рекомендуемого Нормами значения H_0/D , предлагается сравнить условие устойчивости в Нормам с другими известными методами расчета устойчивости винтовых пружин сжатия.

Аналитический метод расчета устойчивости пружин сжатия

Почти все работы, посвященные устойчивости пружин сжатия, основаны на идее введения эквивалентного бруса [2].

В результате исследований 1910 и 1924 гг. Хурльбринк и Граммель получили квадратное уравнение для критического значения нагрузки и установили, что в отличие от действительного прямого бруса брус, эквивалентный пружине, может терять устойчивость только при определенных соотношениях первоначальной высоты пружины и ее среднего диаметра.

На основной недостаток названных работ указали Биецено и Кох в 1925 г.: при определении критической нагрузки не учитывалось влияние поперечной силы, которое в пружине гораздо более существенно, чем в прямом брусе сплошного сечения. Они учли поперечную силу и получили кубическое уравнение для критического значения нагрузки, установив, что пружина может терять устойчивость при любых соотношениях высоты пружины и ее среднего диаметра.

В 1938 г. инженер С. Д. Пономарев обобщил результаты расчета пружин на устойчивость, полученные предшествующими исследователями [8].

Другой подход к определению критического значения нагрузки на пружины сжатия предложил Н. А. Чернышев [9]. Пружина не заменялась эквивалентным прямым бруском, а рассматривалась как брус двойкой кривизны с винтовой геометрической осью. В качестве первого приближения Н. А. Чернышев получил квадратное уравнение для определения критического значения нагрузки и некоторое предельное значение отношения высоты пружины к ее среднему диаметру, ниже которого потеря устойчивости невозможна. Таким образом, с качественной стороны результаты его исследований соответствуют результатам Хурльбринка и Граммеля, но благодаря учету влияния поперечной силы полученные им численные результаты значительно отличаются от результатов его предшественников.

В 1950 г. В. М. Макушин рассчитал устойчивость витой пружины методом эквивалентного бруса с использованием динамического приема, при котором критические нагрузки на сжатый брус определяются путем рассмотрения его малых поперечных колебаний [4].

В общем случае динамический прием нахождения критического значения нагрузки заключается в том, что рассчитывается частота малых колебаний и определяется то значение нагрузки, при котором эта частота обращается в ноль, т. е. период колебаний становится бесконечно большим.

В работе [4] выражение для отношения критической осадки $\lambda_{\text{крит}}$ к высоте недеформированной пружины H_0 имеет вид

$$\frac{\lambda_{\text{крит}}}{H_0} = \frac{1}{2 - C/B_b} \times \left[1 - \sqrt{1 - \frac{1}{\eta_1} \cdot \frac{2 - C/B_b}{1 + C/B_n} \left(\frac{D}{H_0} \right)^2} \right], \quad (1)$$

где $B_n = E \cdot I_n$ – жесткость изгиба проволоки относительно главной центральной оси, перпендикулярной к оси пружины, I_n – момент инерции относительно главной центральной оси n ; $B_b = E \cdot I_b$ – жесткость изгиба проволоки относительно главной центральной оси, параллельной оси пружины, I_b – момент инерции относительно главной центральной оси b ; $C = G \cdot I_p$ – жесткость кручения проволоки, I_p – полярный момент инерции; D – средний диаметр пружины; $1/\eta_1$ – параметр закрепления торцевых витков пружины.

Значения коэффициента $1/\eta_1$, полученные при условии, что в качестве аппроксимирующих функций выбраны фундаментальные функции собственных поперечных колебаний балок с теми же краевыми условиями, как и рассматриваемые пружины, приведены в табл. 1.

Формулу (1) можно представить в виде

$$\frac{\lambda_{\text{крит}}}{H_0} = \xi_1 \left[1 - \sqrt{1 - \frac{1}{\eta_1} \xi_2 \left(\frac{D}{H_0} \right)^2} \right],$$

где коэффициенты

$$\xi_1 = \frac{1}{2 - C/B_b} \quad \text{и} \quad \xi_2 = \frac{2 - C/B_b}{1 + C/B_n},$$

ТАБЛИЦА 1. Значения коэффициента $1/\eta_1$ для разных вариантов закрепления пружины

Вариант закрепления пружины	Параметр закрепления $1/\eta_1$
Нижний торец заделан, верхний свободен	$\pi^2/4 \approx 2,46$
Оба торцевых витка шарнирно оперты	$\pi^2 \approx 9,87$
Нижний виток заделан, верхний шарнирно оперт	20,19
Оба торцевых витка заделаны	$4\pi^2 \approx 39,44$

т. е. зависят только от соотношений между жесткостью изгибов B_n и B_b и кручения C проволоки пружины.

Значение $\left(\frac{H_0}{D}\right)_{\text{пр}}$, при котором $\lambda_{\text{крит}}$ из действительной величины становится мнимой, называется предельным значением. По формуле Н. А. Чернышева,

$$\left(\frac{H_0}{D}\right)_{\text{пр}} = \sqrt{\frac{1}{\eta_1} \cdot \frac{2 - C/B_b}{1 + C/B_n}}. \quad (2)$$

Для пружин из проволоки круглого сечения $B_n = B_b = B = E \cdot I_b$ и отношение $\frac{B}{C} = \frac{E \cdot I_b}{G \cdot I_p} = 1 + \mu$, откуда $C = \frac{B}{1 + \mu}$. После преобразований формула (2) принимает вид

$$\left(\frac{H_0}{D}\right)_{\text{крит}} = \sqrt{\frac{1}{\eta_1} \cdot \frac{2 - \frac{1}{1 + \mu}}{1 + \frac{1}{1 + \mu}}}$$

и становится идентичной выражению, указанному в Нормах.

ТАБЛИЦА 2. Предельное отношение $\left(\frac{H_0}{D}\right)_{\text{пр}}$ для разных случаев закрепления пружины

Вариант закрепления	Предельное отношение $\left(\frac{H_0}{D}\right)_{\text{пр}}$
Нижний торец заделан, верхний свободен	1,31
Оба торцевых витка шарнирно оперты	2,62
Нижний виток заделан, верхний шарнирно оперт	3,75
Оба торцевых витка заделаны	5,24

При $\frac{H_0}{D} > \left(\frac{H_0}{D}\right)_{\text{пр}}$ пружина может потерять устойчивость, а при $\frac{H_0}{D} \leq \left(\frac{H_0}{D}\right)_{\\text{пр}}$ потеря устойчивости невозможна. Это обстоятельство принципиально отличает поведение сжатой пружины от поведения сжатого стержня.

Предельное отношение $\left(\frac{H_0}{D}\right)_{\text{пр}}$ для разных случаев закрепления пружины приведено в табл. 2.

Таким образом, метод расчета винтовых пружин сжатия на устойчивость В. М. Макушина [4] предъявляет менее жесткие требования к соотношению высоты и среднего диаметра пружины по сравнению с Нормами.

Расчет устойчивости пружин с использованием метода конечных элементов

В качестве альтернативы аналитическим методам для уточненного расчета устойчиво-

сти конструкции при сжатии применяют численный метод конечных элементов (МКЭ).

Потеря устойчивой формы равновесия конструкции возможна как при упругих деформациях, так и при превышении напряжений предела упругости материала. При этом для любого значения критической нагрузки характерна своя неустойчивая форма, количество которых равно количеству степеней свободы системы.

Определение потери устойчивости пружины с применением МКЭ производится в пределах ее упругой деформации и носит силовой характер, т. е. находят критическую силу, при которой пружина будет иметь определенную форму неустойчивого состояния.

Задача линейной устойчивости МКЭ решается посредством добавления дифференциальной матрицы жесткости к линейной матрице жесткости. С физической точки зрения дифференциальная жесткость характеризует линейную аппроксимацию эффекта изменения жесткости упругой системы с ростом напряжений: ослабление линейной матрицы жесткости при увеличении сжимающих напряжений и упрочнение при увеличении растягивающих напряжений [1].

Для определения критических значений (точек бифуркаций кривой равновесных состояний) используют энергетический метод, суть которого состоит в отслеживании изменения полной потенциальной энергии системы при переходе из одной формы равновесия в другую.

Решение задачи линейной устойчивости сводится к нахождению собственных значений характеристического уравнения:

$$\{[K_a] + \lambda[K_d]\} = \{0\},$$

где $[K_a]$ – линейная матрица жесткости; $[K_d]$ – дифференциальная матрица жесткости; λ – собственное значение, соответствующее критической нагрузке потери устойчивости.

Собственное значение λ является мерой пропорциональности между приложенной к пружине нагрузкой и нагрузкой, при которой возникает данная форма неустойчивости.

Среди полученных критических значений нагрузки большое значение имеет только первое, по которому в первую очередь конструкция теряет устойчивость.

Была проанализирована устойчивость внутренней подклиновой пружины для грузовой тележки с осевой нагрузкой 27 тс. Ее параметры:

Наружный диаметр, D_1 , $96_{-1,0}^{+0,5}$ мм

Средний диаметр, D , $82_{-1,00}^{+0,61}$ мм

Диаметр прутка, d , $14_{-0,11}$ мм

Полное число витков, n_1 , $12,9 \pm 0,25$

Число рабочих витков, n_p , $11,40 \pm 0,25$

Высота в свободном состоянии, H_0 , 312 ± 2 мм.

Как правило, на средний диаметр пружины D не назначают допуски, но для определения возможных коэффициентов устойчивости пружины $k_{уст}$, соответствующих отношению высоты ненагруженной пружины H_0 к ее среднему диаметру D , они были определены с учетом допусков на наружный диаметр и диаметр прутка пружины.

Коэффициенты устойчивости пружины по Нормам с учетом допусков на ее геометрические размеры приведены в табл. 3.

В расчетах МКЭ рассматривали пружину с геометрическими параметрами, приводящими к номинальному значению $k_{уст} = 3,8$ и мак-

ТАБЛИЦА 3. Коэффициенты устойчивости пружины

№ расчетного случая	Высота в свободном состоянии, H_0 , мм	Средний диаметр пружины, D , мм	$k_{уст} = H_0/D$
1 (минимальный)	310	82,61	3,75
2 (номинальный)	312	82,00	3,80
3 (максимальный)	314	81,00	3,88

симальному $k_{уст} = 3,88$, которые превышают значения, заданные Нормами.

При определении устойчивости пружины в качестве силового воздействия принимали нагрузку на пружину, приводящую к смыканию рабочих витков пружины $F_{max} = 8,46$ кН.

Возникновение у пружины форм неустойчивого состояния при силе, превышающей F_{max} , подтверждает, что геометрические параметры и условия эксплуатации пружины не приведут к потере устойчивости пружины.

Чтобы смоделировать поведение пружины в процессе ее эксплуатации в рессорном подвешивании грузовой тележки, при расчете ее на устойчивость МКЭ рассматривали три варианта граничных условий (рис. 1).

Вариант «а» граничных условий пружины на рис. 1 описывает поведение пружины в процессе ее взаимодействия с боковой рамой (снизу жесткая заделка) и фрикционным клином (сверху шарнирное опирание). Смещение верхней опорной поверхности пружины допускается до 20 мм вдоль осей x и y . Этот случай характерен для движения вагона на прямых участках пути.

Вариант «б» граничных условий пружины на рис. 1 характерен для движения вагона в

кривых и на сортировочных горках, когда к пружине, имеющей шарнирное опирание со стороны фрикционного клина, прикладывается момент $M = 65$ Н·м, эквивалентный углу наклона верхней опорной части пружины в $7,5^\circ$. Смещение верхней опорной поверхности пружины допускается до 20 мм вдоль оси x , а угол наклона – $7,5^\circ$ относительно оси y .

Из варианта «в» на рис. 1 следует, что на пружину накладывается ограничение в виде заделки с двух сторон с разрешением на перемещение вдоль оси z для опорного витка в области фрикционного клина. Данный случай возможен при движении вагона на прямых участках пути.

При расчете пружины на устойчивость [10] наносили пространственную твердотельную конечно-элементную сетку (рис. 2). На опорные витки была нанесена 3D-тетраэдральная сетка с 10 узловыми и пирамидальными конечными элементами; на рабочие витки – 3D-гексаэдральная сетка с 8 узловыми элементами. Для равномерного приложения нагрузки к опорному витку и обеспечения условий закрепления на пружину нанесли 1D-соединение в области одного из опорных витков с одномерным интерполяционным элементом RBE3,

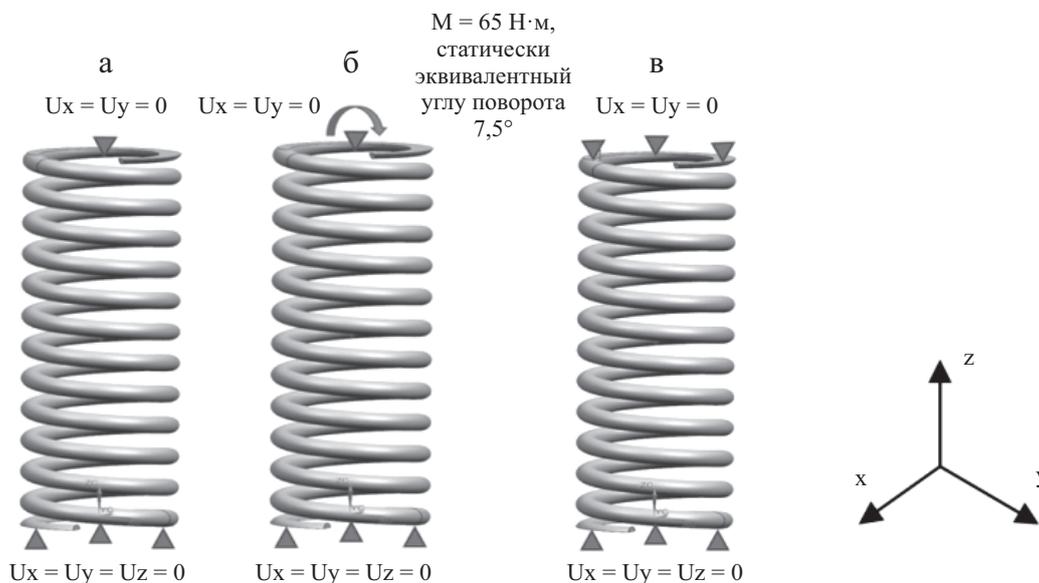


Рис. 1. Условия закрепления пружины:

- а) шарнирное опирание с одной стороны; б) шарнирное опирание и момент с одной стороны; в) заделка с двух сторон

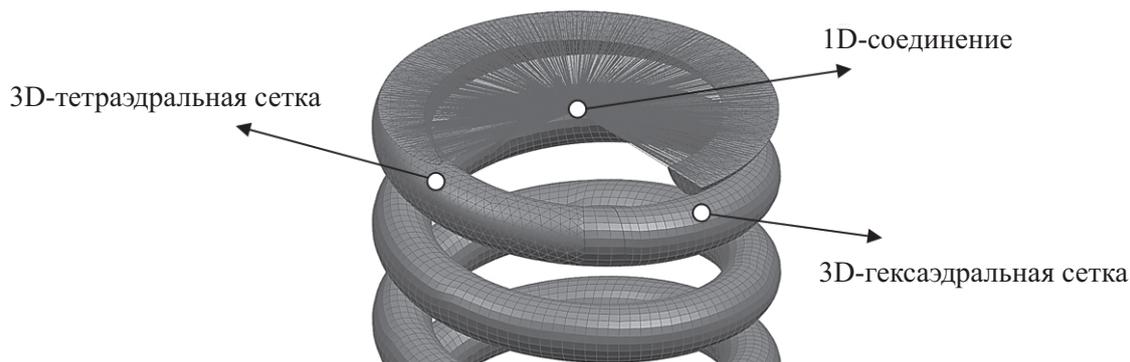


Рис. 2. Нанесение конечно-элементной сетки на пружину

который определяет перемещение мастер-узла как среднее взвешенное от перемещений других узлов.

При расчете пружины на устойчивость для каждого из трех случаев закрепления были получены изгибные и радиальные формы потери устойчивости и соответствующие им собственные значения λ (рис. 3).

Результаты расчета внутренней подклиновой пружины на устойчивость методом конечных элементов для разных способов закрепления приведены в табл. 4.

Для всех рассмотренных способов закрепления получены силы, которые приводят

пружину к изгибной и радиальной формам потери устойчивости. Данные силы превосходят значение F_{\max} на величину от 15 до 46%, что подтверждает наличие у пружины достаточного запаса устойчивости.

Заключение

В статье проанализированы методы оценки устойчивости пружины при сжатии – по Нормам, аналитический и метод конечных элементов.

Анализ аналитического метода расчета пружин на устойчивость показал, что данный

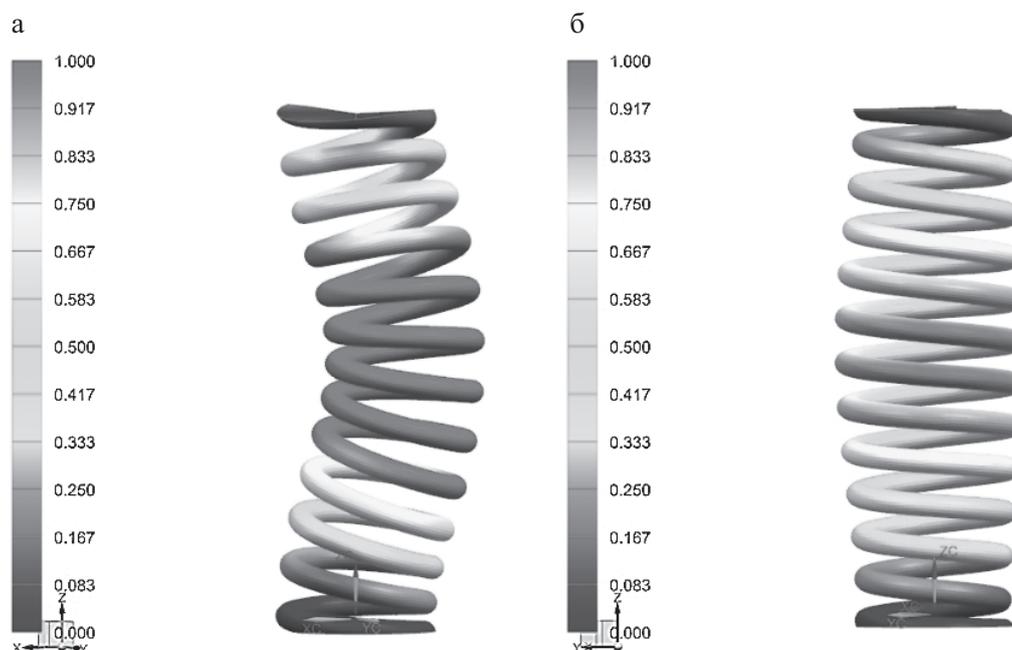


Рис. 3. Формы потери устойчивости:
а) изгибная; б) радиальная

ТАБЛИЦА 4. Результаты расчета внутренней подклиновой пружины на устойчивость методом конечных элементов при силе сжатия $F_{\max} = 8,46$ кН

Граничные условия	Формы потери устойчивости		Геометрические параметры пружины	
			Номинальные размеры	Размеры с учетом допусков, приводящие к максимальному $k_{уст}$
Заделка с двух сторон	Изгибная	λ	1,47	1,41
		F , кН	12,41	11,92
	Радиальная	λ	1,35	1,32
		F , кН	11,43	11,12
Шарнирное опирание	Изгибная	λ	1,23	1,18
		F , кН	10,43	10,01
	Радиальная	λ	1,39	1,35
		F , кН	11,73	11,43
Шарнирное опирание и момент	Изгибная	λ	1,21	1,16
		F , кН	10,19	9,79
	Радиальная	λ	1,36	1,33
		F , кН	11,50	11,21

метод предъявляет менее жесткие требования к соотношению высоты ненагруженной пружины H_0 и ее среднего диаметра D по сравнению с Нормами.

При анализе устойчивости внутренней подклиновой пружины для грузовой тележки с осевой нагрузкой 27 тс методом конечных элементов можно оценить устойчивость пружины с помощью форм потери устойчивости и соответствующих им величин нагрузок.

Полученные величины сил превосходят значение нагрузки на пружину F_{\max} , приводящей к смыканию рабочих витков, что подтверждает наличие у пружины запаса устойчивости.

По результатам анализа методов расчета пружины на устойчивость предлагается использовать комплексный подход к этому расчету. В Норме заложен существенный запас допустимой величины отношения высоты пружины в ненагруженном состоянии к ее среднему диаметру, поэтому при расчетах

пружины на устойчивость следует руководствоваться, в первую очередь, требованиями Норм. Если вновь спроектированная пружина не удовлетворяет данным требованиям, т. е. значение $\frac{H_0}{D}$ превышает допустимое, то рекомендуется использовать представленный в работе вариант оценки устойчивости пружины МКЭ с определением форм потери устойчивости пружины и соответствующих им силовых факторов.

Библиографический список

1. Данилов Ю. Практическое использование NX / Ю. Данилов, И. Артамонов. – М. : ДМК Пресс, 2011. – 322 с.
2. Голев Р. В. Устойчивость пространственных упругих стержней с постоянными по длине кривизнами и кручением при статическом нагружении : дисс. ... канд. техн. наук / Р. В. Голев. – Пермь, 1971.

3. ГОСТ 9246-2013. Тележки двухосные трех-элементные грузовых вагонов железных дорог колеи 1520. Общие технические условия.

4. Макушин В. М. Поперечные колебания и устойчивость цилиндрических витых пружин / В. М. Макушин // Динамика и прочность пружин : сб. ст. / под ред. С. В. Серенсена, С. Д. Пономарева. – М., 1950. – С. 354.

5. Нормы для расчета и проектирования вагонов железных дорог МПС колеи 1520 мм (несамоходных) / ГосНИИВ – ВНИИЖТ. – М., 1996.

6. Нормы для расчета и проектирования новых и модернизированных вагонов железных дорог МПС колеи 1520 мм (несамоходных) / ВНИИВ – ВНИИЖТ. – М., 1983.

7. Нормы для расчета на прочность и проектирования механической части новых и модернизированных вагонов железных дорог МПС колеи 1520 мм (несамоходных) / ВНИИЖТ. – М., 1971.

8. Пономарев С. Д. Расчет и конструкция витых пружин / С. Д. Пономарев. – М. : ОНТИ, 1938. – 352 с.

9. Чернышев Н. А. Устойчивость пружин сжатия / Н. А. Чернышев // Новые методы расчета пружин : сб. ст. – М. : МАШГИЗ, 1946. – С. 46–56.

10. Siemens PLM Software, NX Advanced Simulation, Version 8.5.

3. GOST 9246-2013. Telezhki dvukhosnyye trekh-elementnyye gruzovykh vagonov zheleznykh dorog kolei 1520. Obshchiye tekhnicheskiye usloviya. [Two-Axle Three-Element Bogies of 1,520 mm Gauge Railway Freight Carriages. General Technical Conditions.]

4. Makushin V.M. Poperechnyye kolebaniya i ustoychivost tsilindricheskikh vitykh pruzhin [Lateral Oscillations and Stability of Cylindrical Coil Springs]. *Dinamika i prochnost pruzhin (Spring Dynamics and Strength)*, ed. S.V. Serensen & S.D. Ponomarev. Moscow, 1950. P. 354.

5. Normy dlya rascheta i proyektirovaniya vagonov zheleznykh dorog MPS kolei 1520 mm (nesamokhodnykh) [Norms for Calculation and Design of Transportation Ministry Carriages for 1,520 mm Gauge Railways (Non-Self-Propelled)]; GosNIIV – VNIIZhT. Moscow, 1996.

6. Normy dlya rascheta i proyektirovaniya novykh i modernizirovannykh vagonov zheleznykh dorog MPS kolei 1520 mm (nesamokhodnykh) [Norms for Calculation and Design of New and Modernised Transportation Ministry Carriages for 1,520 mm Gauge Railways (Non-Self-Propelled)]; GosNIIV – VNIIZhT. Moscow, 1983.

7. Normy dlya rascheta na prochnost i proyektirovaniya mekhanicheskoy chasti novykh i modernizirovannykh vagonov zheleznykh dorog MPS kolei 1520 mm (nesamokhodnykh) [Norms for Strength Calculation and Mechanical Engineering of New and Modernised Transportation Ministry Carriages for 1,520 mm Gauge Railways (Non-Self-Propelled)]; VNIIZhT. Moscow, 1971.

8. Ponomarev S.D. Raschet i konstruksiya vitykh pruzhin [Coil Springs Calculation and Design]. Moscow, ONTI, 1938. 352 p.

9. Chernyshev N.A. Ustoychivost pruzhin szhatiya [Pressure Spring Stability]. *Novyye metody rascheta pruzhin (New Methods for Spring Calculations)*. Moscow, MASHGIZ, 1946. Pp. 46-56.

10. Siemens PLM Software, NX Advanced Simulation, Version 8.5.

References

1. Danilov Yu. & Artamonov I. Prakticheskoye ispolzovaniye NX [Practical Application of NX]. Moscow, DMK Press, 2011. 322 p.

2. Golev R. V. Ustoychivost prostranstvennykh uprugikh sterzhney s postoyannymi po dline kriviznami i krucheniyem pri staticheskom nagruzhenii [Stability of Spatial Elastic Beams with Constant-Length Curves and Torsion under Static Load]. Perm, 1971.

*ГУСЕВ Артем Владимирович – аспирант, agusev@tt-center.ru (Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I); ОРЛОВА Анна Михайловна – д-р техн. наук, профессор, заместитель генерального директора по научно-техническому развитию, aorlova@uniwagon.com (ПАО «НПК ОВК»); РУДАКОВА Екатерина Александровна – канд. техн. наук, руководитель отдела динамических расчетов – ведущий научный сотрудник, erudakova@tt-center.ru (ООО «ВНИЦТТ»).