УДК 621.314.21

А. Я. Якушев, А. Г. Середа

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЯГОВОГО ТРАНСФОРМАТОРА С СЕКЦИОНИРОВАННЫМИ ВТОРИЧНЫМИ ОБМОТКАМИ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ

Дата поступления: 08.07.2015
Решение о публикации: 08.09.2015

Цель: Адекватно воспроизвести переходные процессы в силовых цепях электроподвижного состава (ЭПС) при компьютерном моделировании рабочих режимов ЭПС переменного тока. **Методы:** Рассмотрен способ математического описания физических процессов в тяговом трансформаторе с секционированными вторичными обмотками, при котором применяется форма записи системы дифференциальных уравнений в пространстве состояний. Предложена методика расчета индуктивностей рассеяния обмоток тягового трансформатора, основывающаяся на теории многообмоточных трансформаторов. **Результаты:** Получены выражения для расчета индуктивностей рассеяния обмоток трансформатора и взаимных индуктивностей, учитывающих изменение магнитного поля рассеяния обмоток при дискретном переключении нагрузки секций тяговых обмоток. Описан алгоритм для расчета элементов матриц уравнения состояния. Получена математическая модель тягового трансформатора, учитывающая изменение магнитного поля рассеяния обмоток при дискретном переключении нагрузки секций тяговых обмоток. **Практическая значимость:** Моделирование электромагнитных процессов в силовых цепях ЭПС позволяет воспроизводить переходные процессы в силовых цепях ЭПС, экспериментальное исследование которых требует применения дорогостоящих измерительных комплексов, или если экспериментальное исследование работы ЭПС невыполнимо в реальных условиях.

Тяговый трансформатор, многообмоточный трансформатор, индуктивность рассеяния, пространство состояний, уравнение состояния.

Aleksey Ya. Yakushev, Cand. Sci. (Eng.), associate professor, professor, el_tyaga@mail.ru; ***Aleksandr G. Sereda**, postgraduate student, ag-sereda@mail.ru (Petersburg State Transport University) SIMULATION MODEL OF TRACTION TRANSFORMER WITH SECTIONED SECONDARY COIL IN STATE OF SPACE

Objective: To sufficiently simulate transient processes in power circuits of electrically propelled vehicles during computer simulation of working regimes of electrically propelled vehicles of alternating current. **Methods:** A method for mathematical description of physical processes occurring in traction transformer with sectioned secondary coil is considered, with a form of recording of differential equation system in state of space used. A method for calculating scattered inductance of traction transformer coils is proposed, based on the theory of multi-curcuit transformers. **Results:** Equations for calculating scattered inductance of transformer coils and mutual inductance were produced, taking into account coil leakage magnetic field variations in case of discrete load switching of traction coil sections. An algorithm for calculating matrix elements of equation of state was described. A simulation model of a traction transformer which takes into account coil leakage magnetic field variations in case of discrete load switching of traction coil sections. **Practical importance:** Simulation of electromagnetic processes in electrically propelled vehicles' power circuits allows to reproduce transient processes in electrically propelled vehicles' power circuits, experimental study of which requires application of expensive measuring systems, or if expermeintal studies of electrically propelled vehicles' operation is impossible in real conditions.

Traction transformer, multi-circuit transformer, leakage inductance, state of space, equation of condition.

Компьютерное моделирование квазиустановившихся и переходных процессов в силовых цепях электроподвижного состава (ЭПС) позволяет исследовать работу его устройств и системы управления, не прибегая к натурным испытаниям из-за сложностей организации эксперимента и значительных финансовых затрат. Пакеты схемотехнического моделирования (MATLAB Simulink, OrCAD, DesigneLab) используют для исследования большого круга электротехнических и электромеханических устройств. Они обеспечивают простое формирование схем компьютерных моделей, но в то же время по отдельным агрегатам, таким как электродвигатели постоянного и переменного тока, многообмоточный трансформатор, не достаточно полно отображают их физические свойства.

При создании компьютерной модели силовой цепи ЭПС переменного тока для адекватного воспроизведения работы тягового трансформатора с секционированными вторичными обмотками в режимах коммутации тиристорных плеч выпрямительно-инверторного преобразователя предлагается описать его работу в пространстве состояний [4, 8]. Для этого необходимо определить собственные и взаимные индуктивности трансформатора, а также элементы матриц уравнения состояния.

Определение индуктивностей рассеяния тягового трансформатора

В отсутствие емкостных токов и токов утечки в изоляции, а также пренебрегая влиянием вихревых токов, n-обмоточный трансформатор описывает система из n уравнений [5, 6]:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1q} & \cdots & r_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{p1} & \cdots & r_{pq} & \cdots & r_{pn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1} & \cdots & r_{nq} & \cdots & r_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_p \\ \vdots \\ i_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{11} & \cdots & L_{1q} & \cdots & L_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{p1} & \cdots & L_{pq} & \cdots & L_{pn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{n1} & \cdots & L_{nq} & \cdots & L_{nn} \end{bmatrix} \cdot \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_p \\ \vdots \\ i_n \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где u – n-мерный вектор, элементами которого являются напряжения обмоток трансформатора; i – n-мерный вектор, элементами которого являются токи, протекающие по обмоткам трансформатора; r – матрица размерностью (n; n), элементами которой являются активная составляющая взаимного сопротивления, учитывающая потери в стали и добавочные потери; при $p = q$ учитывается также сопротивление обмотки постоянному току; L – матрица размерностью (n; n), элементами которой являются $L_{pq} = L_{qp}$ взаимные (при $p = q$ – собственные) индуктивности обмоток трансформатора.

Магнитное поле трансформатора можно условно разбить на взаимосвязанные части: основное поле и поле рассеяния обмоток [3]. Тогда, приводя все обмотки к числу витков сетевой обмотки, запишем систему уравнений (1) следующим образом [2] (считаем, что источник питания подключен к 1-й обмотке):

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ -u_n^{'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_m + r_{\sigma_1} & \cdots & r_m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_m & \cdots & r_m + r_{\sigma n}^{'} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_p^{'} \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} L_m + L_{\sigma_1} & \cdots & L_m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_m & \cdots & L_m + L_{\sigma n}^{'} \end{bmatrix} \cdot \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_n^{'} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

где r_m – активное сопротивление, учитывающее потери в стали; L_m – взаимная индуктивность, обусловленная потоком, все силовые линии которого полностью замыкаются по сердечнику; $r_{\sigma p}^{'}$ – активное сопротивление, учитывающее потери от потока рассеяния p-й обмотки, приведенное к числу витков сетевой обмотки; $L_{\sigma p}^{'}$ – индуктивность рассеяния p-й обмотки, приведенная к числу витков сетевой обмотки.

Во время работы трансформатора под нагрузкой отдельные секции тяговых обмоток выключают из цепи, что изменяет магнитодвижущие силы первичной и вторичных обмоток. Следовательно, изменяется магнитное поле рассеяния обмоток, а вместе с ним – индуктивности рассеяния обмоток. Это изменение предлагается учитывать взаимными индуктивностями $L_{\sigma pq}^{'}$ обмоток p и q относительно индуктивностей рассеяния обмоток, определенных для n опытов короткого замыкания трансформатора. Тогда систему уравнений (2) запишем следующим образом:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ -u_n^{'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_m + r_{\sigma 1} & \cdots & r_m + r_{\sigma 1n}^{\prime} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_m + r_{\sigma n1}^{'} & \cdots & r_m + r_{\sigma n}^{'} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_p^{'} \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} L_m + L_{\sigma 1} & \cdots & L_m + L_{\sigma 1n}^{\prime} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_m + L_{\sigma n1}^{'} & \cdots & L_m + L_{\sigma n}^{'} \end{bmatrix} \cdot \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_n^{'} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

где $r_{\sigma pq}^{'} = r_{\sigma qp}^{'}$ – активная составляющая взаимного сопротивления, учитывающая изменение потерь от потоков рассеяния обмоток при дискретном переключении нагрузки секций тяговых обмоток, приведенная к числу витков сетевой обмотки (при $p = q$ – активное сопротивление, учитывающее потери от потока рассеяния p-й обмотки); $L_{\sigma pq}^{'} = L_{\sigma qp}^{'}$ – взаимная индуктивность, учитывающая изменение индуктивностей рассеяния обмоток при дискретном переключении нагрузки секций тяговых обмоток, приведенная к числу витков сетевой обмотки (при $p = q$ – индуктивность рассеяния).

Опыты короткого замыкания тяговых трансформаторов между сетевой обмоткой и одной или более последовательно соединенными секциями тяговых обмоток приведены в ряде руководств по эксплуатации электровозов. Применяя теорию многообмоточных трансформаторов [1], определим взаимосвязь между индуктивностями рассеяния обмоток, активными потерями от потоков рассеяния и сопротивлением короткого замыкания при s ($s = 1, 2, \ldots, n - 1$) последовательно соединенных секций вторичных обмоток (пример для $s = n - 1$):

$$w^2 L_{\text{к}1s} = w^2 L_{\sigma 1} + \sum_{p=2}^{n} w_p^2 L_{\sigma p}^{'}, \quad (4)$$

$$w^2 r_{\text{к}1s} = w^2 r_{\sigma 1} + \sum_{p=2}^{n} w_p^2 r_{\sigma p}^{'}, \quad (5)$$

где $w = \sum_{p=2}^{n} w_p$ – суммарное число витков вторичных обмоток; $r_{\text{к}1s}$ – активное сопротивление короткого замыкания трансформатора со стороны зажимов 1–1; $L_{\text{к}1s}$ – индуктивное сопротивление короткого замыкания трансформатора со стороны зажимов 1–1.

Для опытов короткого замыкания трансформатора, когда $s < n - 1$, p-я обмотка не закорочена и w_p, $r_{\sigma p}^{'}$, $L_{\sigma p}^{'}$ равны нулю.

Решениями систем из n различных уравнений (4) и (5) являются индуктивности рассеяния обмоток и активные сопротивления, учитывающие потери от потоков рассеяния, для n опытов короткого замыкания трансформатора. Изменение индуктивности рассеяния обмоток и активных потерь от потоков рассеяния при дискретном переключении нагрузки секций тяговых обмоток можно определить также относительно n опытов холостого хода, когда $L'_{\sigma p}$, $r'_{\sigma p}$ равны нулю (так как магнитное поле рассеяния обмоток проявляется при наличии тока не менее чем в двух обмотках [3]).

Тогда взаимосвязь между $L'_{\sigma pq}$, $r'_{\sigma pq}$ и сопротивлением короткого замыкания при s (s = 1, 2, …, n – 1) последовательно соединенных секций вторичных обмоток (пример для s = = n – 1) определим по уравнениям

$$w^2 L_{\text{к}1s} - w^2 L_{\sigma 1} - \sum_{p=2}^{n} w_p^2 L'_{\sigma p} = \\ = -w^2 \sum_{p=2}^{n} w_p L'_{\sigma 1 p} + \sum_{q=2}^{n} \sum_{\substack{p=2, \\ p \neq q}}^{n} w_q w_p L'_{\sigma pq} \tag{6}$$

$$w^2 r_{\text{к}1s} - w^2 r_{\sigma 1} - \sum_{p=2}^{n} w_p^2 r'_p = \\ = -w^2 \sum_{p=2}^{n} w_p r'_{\sigma 1 p} + \sum_{q=2}^{n} \sum_{\substack{p=2, \\ p \neq q}}^{n} w_q w_p r'_{\sigma q p}. \tag{7}$$

Для опытов короткого замыкания трансформатора, когда $s < n - 1$, p-я обмотка не закорочена и w_p, $r'_{\sigma p}$, $L'_{\sigma p}$, $r'_{\delta pq}$, $L'_{\sigma pq}$ равны нулю.

Определим взаимные индуктивности $L'_{\sigma pq}$ и активную составляющую взаимных сопротивлений $r'_{\sigma pq}$, решив матричные уравнение относительно матриц L'_{σ} и r'_{σ}, соответственно:

$$\left\| L'_{\text{к}} \right\| = \left\| K_L \right\| \cdot \left\| L'_{\sigma} \right\|;$$

$$\left\| r'_{\text{к}} \right\| = \left\| K_r \right\| \cdot \left\| r'_{\sigma} \right\|,$$

где $L'_{\text{к}}$ – $n \cdot (n-1)/2$-мерный вектор, элементами которого являются выражения в левой части уравнений (6); L'_{σ} – $n \cdot (n-1)/2$-мерный вектор, элементами которого являются взаимные индуктивности, обусловленные изменением индуктивностей рассеяния обмоток при дискретном переключении нагрузки секций тяговых обмоток; K_L – матрица размерностью $(n \cdot (n-1)/2;\ n \cdot (n-1)/2)$, элементами которой являются коэффициенты при взаимных $L'_{\sigma pq}$ индуктивностях уравнений (6); $r_{\text{к}}$ – $n \cdot (n-1)/$ /2-мерный вектор, элементами которого являются выражения в левой части уравнений (7); r'_{σ} – $n \cdot (n-1)/2$-мерный вектор, элементами которого являются взаимные активные сопротивления, обусловленные изменением потерь от потоков рассеяния обмоток при дискретном переключении нагрузки секций тяговых обмоток; K_r – матрица $(n \cdot (n-1)/2;\ n \cdot (n-1)/2)$, элементами которой являются коэффициенты при активной составляющей взаимных сопротивлений $r'_{\sigma pq}$ уравнений (7).

Определение элементов матриц динамики и входа

Запишем векторно-матричную форму [7] системы дифференциальных уравнений (3) для вектора состояния $x^T = [i_1, \ldots, i'_p, \ldots, i'_n]$.

$$\frac{d}{dt} x(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t)$$ – уравнение состояния (динамики);

$$y(t) = C \cdot x(t)$$ – уравнение выхода,

где $x(t)$ – n-мерный вектор состояния, компонентами которого являются переменные состояния системы n-го порядка (i'_p ток p-й обмотки, приведенный к числу витков сетевой обмотки (w_1)); $u(t)$ – n-мерный вектор входа (управления), компонентами которого являются входные переменные состояния (u'_p напряжение p-й обмотки, приведенное к числу витков сетевой обмотки); $y(t)$ – n-мерный выходной вектор, компонентами которого являются выходные переменные состояния (i_p ток p-й обмотки);

$$C = \begin{bmatrix} 1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & w_1/w_p & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & w_1/w_n \end{bmatrix} -$$

матрица выхода размерностью (n; n).

Выбор коэффициентов матрицы выхода обусловлен тем, что в уравнение динамики входят электрические величины u'_p, i'_q, приведенные к числу витков сетевой обмотки; A, B – матрицы динамики (коэффициентов системы) и входа, соответственно, размерностью (n; n).

Для определения элементов матриц динамики и входа необходимо разрешить систему дифференциальных уравнений первого порядка (3) относительно производных. Найдем элементы первой строки матриц A и B, выражая производную тока, протекающего по первичной обмотке, через оставшиеся токи. Для этого составим матрицы, элементами которых являются коэффициенты при токах, их производных и напряжениях обмоток трансформатора системы уравнений (3):

$$
{}_{L}A = \\
= \begin{bmatrix} L_m + L_{\sigma 1} & \cdots & L_m + L'_{\sigma 1q} & \cdots & L_m + L'_{\sigma 1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L'_m + L'_{\sigma p1} & \cdots & L_m + L'_{\sigma p} & \cdots & L_m + L'_{\sigma pn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_m + L_{\sigma n1} & \cdots & L_m + L'_{\sigma nq} & \cdots & L_m + L'_{\sigma n} \end{bmatrix};
$$

$$
{}_{r}A = \begin{bmatrix} r_m + r'_{\sigma 1} & \cdots & r_m + r'_{\sigma 1q} & \cdots & r_m + r'_{\sigma 1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_m + r'_{\sigma p1} & \cdots & r_m + r'_{\sigma p} & \cdots & r_m + r'_{\sigma pn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_m + r'_{\sigma n1} & \cdots & r_m + r'_{\sigma nq} & \cdots & r_m + r'_{\sigma n} \end{bmatrix};
$$

$$
{}_{u}B = -\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & -1 \end{bmatrix}.
$$

Обозначая номер шага символом k, запишем выражения в теле цикла:

$$
{}_{L}^{k}A = \begin{bmatrix} {}_{L}^{k-1}a_{1,1} & \cdots & {}_{L}^{k-1}a_{1,n-k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ {}_{L}^{k-1}a_{n-k,1} & \cdots & {}_{L}^{k-1}a_{n-k,n-k} \end{bmatrix} \times \\
\times {}_{L}^{k-1}a_{n-k+1,n-k+1} - \begin{bmatrix} {}_{L}^{k-1}a_{1,n-k+1} \\ \vdots \\ {}_{L}^{k-1}a_{n-k,n-k+1} \end{bmatrix} \times \\
\times \begin{bmatrix} {}_{L}^{k-1}a_{n-k+1,1} & \cdots & {}_{L}^{k-1}a_{n-k+1,n-k} \end{bmatrix}; \tag{8}
$$

$$
{}_{r}^{k}A = \begin{bmatrix} {}_{r}^{k-1}a_{1,1} & \cdots & {}_{r}^{k-1}a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ {}_{r}^{k-1}a_{n-k,1} & \cdots & {}_{r}^{k-1}a_{n-k,n} \end{bmatrix} \times \\
\times {}_{L}^{k-1}a_{n-k+1,n-k+1} - \begin{bmatrix} {}_{L}^{k-1}a_{1,n-k+1} \\ \vdots \\ {}_{L}^{k-1}a_{n-k,n-k+1} \end{bmatrix} \times \\
\times \begin{bmatrix} {}_{r}^{k-1}a_{n-k+1,1} & \cdots & {}_{r}^{k-1}a_{n-k+1,n} \end{bmatrix}; \tag{9}
$$

$$
{}_{u}^{k}B = \begin{bmatrix} {}_{u}^{k-1}b_{1,1} & \cdots & {}_{u}^{k-1}b_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ {}_{u}^{k-1}b_{n-k,1} & \cdots & {}_{u}^{k-1}b_{n-k,n} \end{bmatrix} \times \\
\times {}_{L}^{k-1}a_{n-k+1,n-k+1} - \begin{bmatrix} {}_{L}^{k-1}a_{1,n-k+1} \\ \vdots \\ {}_{L}^{k-1}a_{n-k,n-k+1} \end{bmatrix} \times \\
\times \begin{bmatrix} {}_{u}^{k-1}b_{n-k+1,1} & \cdots & {}_{u}^{k-1}b_{n-k+1,n} \end{bmatrix}. \tag{10}
$$

Выражения (8)–(10) на первом шаге примут вид

$$
{}_{L}^{1}A = \begin{bmatrix} L_m + L_{\sigma 1} & \cdots & L_m + L'_{\sigma 1 n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L'_m + L'_{\sigma n-11} & \cdots & L_m + L'_{\sigma n-1} \end{bmatrix} \times \\
\times (L_m + L'_{\sigma n}) - \begin{bmatrix} L_m + L'_{\sigma 1n} \\ \vdots \\ L_m + L'_{\sigma n-1\, n} \end{bmatrix} \times \\
\times \begin{bmatrix} L_m + L'_{\sigma n1} & \cdots & L_m + L'_{\sigma n\, n-1} \end{bmatrix};
$$

$$
{}_{r}^{1}A=\begin{bmatrix} r_m+r_{\sigma 1} & \cdots & r_m+r'_{\sigma 1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ r'_m+r'_{\sigma n-11} & \cdots & r_m+r'_{\sigma n-1n}\end{bmatrix}\times
$$

$$
\times(L_m+L'_{\sigma n})-\begin{bmatrix} L_m+L'_{\sigma 1n}\\ \vdots\\ L_m+L'_{\sigma n-1n}\end{bmatrix}\times
$$

$$
\times\begin{bmatrix} r_m+r'_{\sigma n1} & \cdots & r_m+r'_{\sigma nn}\end{bmatrix};
$$

$$
{}_{u}^{1}B=\begin{bmatrix} -1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & \cdots & -1 & 0\end{bmatrix}\times
$$

$$
\times(L_m+L'_{\sigma n})-
$$

$$
-\begin{bmatrix} L_m+L'_{\sigma 1n}\\ \vdots\\ L_m+L'_{\sigma n-1n}\end{bmatrix}\times[0 \quad \cdots \quad -1],
$$

на последнем шаге $(n-1)$ –

$$
{}_{L}^{n-1}A={}_{L}^{n-2}a_{1,1}\times{}_{L}^{n-2}a_{2,2}-{}_{L}^{n-2}a_{1,2}\times{}_{L}^{n-2}a_{2,1};
$$

$$
{}_{r}^{n-1}A=\begin{bmatrix}{}_{r}^{n-2}a_{1,1} & \cdots & {}_{r}^{n-2}a_{1,n}\end{bmatrix}\times
$$

$$
\times{}_{L}^{n-2}a_{2,2}-{}_{L}^{n-2}a_{1,2}\times
$$

$$
\times\begin{bmatrix}{}_{r}^{n-2}a_{2,1} & \cdots & {}_{r}^{n-2}a_{2,n}\end{bmatrix};
$$

$$
{}_{u}^{n-1}B=\begin{bmatrix}{}_{u}^{n-2}b_{1,1} & \cdots & {}_{u}^{n-2}b_{1,n}\end{bmatrix}\times
$$

$$
\times{}_{L}^{n-2}a_{2,2}-{}_{L}^{n-2}a_{1,2}\times
$$

$$
\times\begin{bmatrix}{}_{u}^{n-2}b_{2,1} & \cdots & {}_{u}^{n-2}b_{2,n}\end{bmatrix}.
$$

Затем вычислим элементы первой строки матриц динамики и входа:

$$
\begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,q} & \cdots & a_{1,n}\end{bmatrix}=
$$

$$
=-\frac{1}{{}_{L}^{n-1}a_{1,1}}\begin{bmatrix}{}_{r}^{n-1}a_{1,1} & \cdots & {}_{r}^{n-1}a_{1,q} & \cdots & {}_{r}^{n-1}a_{1,n}\end{bmatrix};
$$

$$
\begin{bmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,q} & \cdots & b_{1,n}\end{bmatrix}=
$$

$$
=-\frac{1}{{}_{L}^{n-1}a_{1,1}}\begin{bmatrix}{}_{u}^{n-1}b_{1,1} & \cdots & {}_{u}^{n-1}b_{1,q} & \cdots & {}_{u}^{n-1}b_{1,n}\end{bmatrix}.
$$

Меняя местами элементы 1-й и p-й строки, а также 1-го и p-го столбца матриц ${}_{L}A$, ${}_{r}A$ и ${}_{u}B$, получим

$$
{}_{L}A=
$$

$$
=\begin{bmatrix} L_m+L'_{\sigma p} & \cdots & L_m+L'_{\sigma p1} & \cdots & L_m+L'_{\sigma pn}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ L'_{p1}+L'_{\sigma 1p} & \cdots & L_m+L_{\sigma 1} & \cdots & L_m+L'_{\sigma 1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ L_m+L'_{\sigma np} & \cdots & L_m+L'_{\sigma n1} & \cdots & L_m+L'_{\sigma n}\end{bmatrix};
$$

$$
{}_{r}A=\begin{bmatrix} r_m+r'_{\sigma p} & \cdots & r_m+r'_{\sigma p1} & \cdots & r_m+r'_{\sigma pn}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ r_m+r'_{\sigma 1p} & \cdots & r_m+r_{\sigma 1} & \cdots & r_m+r'_{\sigma 1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ r_m+r'_{\sigma np} & \cdots & r_m+r'_{\sigma n1} & \cdots & r_m+r'_{\sigma n}\end{bmatrix};
$$

$$
{}_{u}B=-\begin{bmatrix} -1 & \cdots & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & -1\end{bmatrix},
$$

а выполняя вычисления по выражениям (8)–(10), $n-1$ раз найдем элементы p-й строки матриц динамики и входа:

$$
\begin{bmatrix} a_{p,1} & \cdots & a_{p,q} & \cdots & a_{p,n}\end{bmatrix}=
$$

$$
=-\frac{1}{{}_{L}^{n-1}a_{1,1}}\begin{bmatrix}{}_{r}^{n-1}a_{1,p} & \cdots & {}_{r}^{n-1}a_{1,1} & \cdots & {}_{r}^{n-1}a_{1,n}\end{bmatrix};
$$

$$
\begin{bmatrix} b_{p,1} & \cdots & b_{p,q} & \cdots & b_{p,n}\end{bmatrix}=
$$

$$
=-\frac{1}{{}_{L}^{n-1}a_{1,1}}\begin{bmatrix}{}_{u}^{n-1}b_{1,p} & \cdots & {}_{u}^{n-1}b_{1,1} & \cdots & {}_{u}^{n-1}b_{1,n}\end{bmatrix}.
$$

Зная элементы матриц динамики и входа, можно перейти к моделированию тягового трансформатора с секционированными вторичными обмотками в пространстве состояний.

Заключение

Для адекватного воспроизведения работы тягового трансформатора с секционированными вторичными обмотками в режимах коммутации тиристорных плеч выпрямительно-инверторного преобразователя необходимо знать $n \cdot (n-1)/2$ опытов короткого замыкания трансформатора.

Изменение индуктивностей рассеяния обмоток при дискретном переключении нагрузки секций тяговых обмоток можно учесть взаимными индуктивностями и активной составляющей взаимных сопротивлений обмоток математической модели трансформатора в пространстве состояний.

Библиографический список

1. Васютинский С.В. Вопросы теории и расчета трансформаторов / С.В. Васютинский. – Л. : Энергия, 1970. – 431 с.

2. Вольдек А.И. Электрические машины. Введение в электромеханику. Машины постоянного тока и трансформаторы / А.И. Вольдек, В.В. Попов. – СПб. : Питер, 2008. – 320 с.

3. ГОСТ 16110-82. Трансформаторы силовые. Термины и определения.

4. Лебедев С.К. Математические основы теории автоматического управления / С.К. Лебедев ; Кафедра Электропривода и автоматизации промышленных установок. – URL : http://drive.ispu.ru/elib/lebedev/index.html (дата обращения 06.07.2015).

5. Лейтес Л.В. Схемы замещения многообмоточных трансформаторов / Л.В. Лейтес, А.М. Пинцов. – М. : Энергия, 1974. – 192 с.

6. Лейтес Л.В. Электромагнитные расчеты трансформаторов и реакторов / Л.В. Лейтес. – М. : Энергия, 1981. – 392 с.

7. Стрейц В. Метод пространства состояний в теории дискретных линейных систем управления / В. Стрейц ; пер. с англ. под ред. Я.З. Цыпкина. – М. : Наука, Глав. ред. физ.-мат. лит-ры, 1985. – 296 с.

8. Филлипс Ч. Системы управления с обратной связью / Ч. Филлипс, Р. Харбор ; пер. с англ. Б.И. Копылова. – М. : Лаборатория Базовых знаний, 2001. – 616 с.

References

1. Vasyutinskiy S.V. Voprosy teorii i rascheta transformatorov [Issues of Transformer Theory and Calculations]. Leningrad, Energiya, 1970. 431 p.

2. Voldek A.I. & Popov V.V. Elektricheskiye mashiny. Vvedeniye v elektromekhaniku. Mashiny postoyannogo toka i transformatory [Electric Machines. Introduction to Electromechanics. Direct Current Machines and Transformers]. St. Petersburg, Piter, 2008. 320 p.

3. GOST 16110-82. Transformatory silovyye. Terminy i opredeleniya [Power Transformers. Terms and Definitions].

4. Lebedev S.K. Matematicheskiye osnovy teorii avtomaticheskogo upravleniya [Mathematical Foundations of Automatic Control Theory], available at: http://drive.ispu.ru/elib/lebedev/index.html.

5. Leytes L.V. & Pintsov A.M. Skhemy zameshcheniya mnogoobmotochnykh transformatorov [Multi-Circuit Transformer Equivalent Circuits]. Moscow, Energiya, 1974. 192 p.

6. Leytes L.V. Elektromagnitnyye raschety transformatorov i reaktorov [Electromagnetic Calculations for Transformers and Reactors]. Moscow, Energiya, 1981. 392 p.

7. Streyts V. Metod prostranstva sostoyaniy v teorii diskretnykh lineynykh sistem upravleniya [State of Space Method in the Theory of Discrete Linear Control Systems]. Moscow, Nauka, 1985. 296 p.

8. Fillips Ch. & Kharbor R. Sistemy upravleniya s obratnoy svyazyu [Closed-Circuit Control Systems]. Moscow, Laboratoriya bazovykh znaniy, 2001. 616 p.

ЯКУШЕВ Алексей Яковлевич – канд. техн. наук, доцент, профессор, el_tyaga@mail.ru; *СЕРЕДА Александр Геннадьевич – аспирант, ag-sereda@mail.ru (Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I).