



УДК 624.042.7

Т. А. Белаш, А. А. Ермошин, Н. В. Никонова, А. М. УздинПетербургский государственный университет путей сообщения
Императора Александра I**ИСПОЛЬЗОВАНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКОГО МЕТОДА Б. Н. КВАСНИКОВА
ДЛЯ АНАЛИЗА УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ С НЕЛИНЕЙНЫМ СОПРОТИВЛЕНИЕМ**

Представлен пример использования асимптотического метода профессора Б. Н. Квасникова для анализа дифференциальных уравнений нелинейных колебаний систем с гидравлическими демпферами. В соответствии с этим методом каждому члену дифференциального уравнения приписывается порядок, определяющий его значимость в дифференциальном уравнении. Далее составляется система линейных алгебраических уравнений в порядках и на основе ее анализа рассматриваются возможности исключения тех или иных членов и получения соответствующих «укороченных» уравнений. Рассмотрены все варианты «укороченных» уравнений колебаний применительно к задаче нелинейных сейсмических колебаний моста с сейсмоизоляцией. Построен асимптотический портрет рассматриваемого нелинейного уравнения.

нелинейные дифференциальные уравнения, асимптотический анализ, фазовый портрет.

Введение

Три года тому назад скончался один из старейших сотрудников нашего института, доктор физико-математических наук, профессор Борис Николаевич Квасников (рис. 1).

Борис Николаевич родился 6 сентября 1926 г., высшее образование получил в ЛИИЖТе, окончив институт в 1951 г.



Рис. 1. Профессор
Б. Н. Квасников, 2010 г.

Он прошел непростой путь в науке, начав с исследования вопросов устройства пути на кривых [1] и закончив асимптотическими методами решения алгебраических уравнений [2]. Увлечение математикой началось у него сравнительно поздно, когда ему было почти 50 лет. Первые работы в области прикладной математики и механики он опубликовал в 1985 г. В 1990 г. [3], [4] он защитил докторскую диссертацию, посвященную построению укороченных уравнений теории оболочек с использованием асимптотических методов.

Предложенный им при анализе уравнений теории оболочек подход оказался значительно более общим, на его основе можно строить так называемые фазовые портреты уравнений математической физики. Это области в пространстве параметров уравнения, в каждой из которых возможны те или иные упрощения исходного уравнения колебаний. Построение фазовых портретов было успешно реализовано Б. Н. Квасниковым с аспирантом ПГУПС С. Сухейлом для ана-

лиза сейсмических колебаний зданий на кинематических фундаментах [5].

1 Асимптотический портрет уравнения колебаний осциллятора с вязким и сухим трением

1.1 Построение областей асимптотического портрета уравнения колебаний осциллятора с вязким и сухим трением

В [6] под руководством Б. Н. Квасникова построен фазовый портрет уравнения колебаний осциллятора с вязким и сухим трением. Это уравнение после его приведения к безразмерному виду представляется следующим образом:

$$\ddot{\xi} + 2\pi\gamma\dot{\xi} + 4\pi^2\xi - f \cdot \text{sign}\dot{\xi} = -T^2\ddot{y}_0. \quad (1)$$

Здесь введено безразмерное время $\tau = t/T$, где $T = \frac{2\pi}{k}$ – период основного тона колебаний системы. В этом случае выполняются соотношения:

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{T d\tau}. \quad (2)$$

В уравнении (1) и далее двумя точками обозначена производная по безразмерному времени τ .

Величина ξ в уравнении (1) представляет собой безразмерное смещение:

$$\xi = \frac{y}{AgT^2} = \frac{\eta}{T^2}, \quad (3)$$

где Ag – амплитуда ускорений основания.

Заметим, что в правой части уравнения стоит безразмерное расчетное ускорение:

$$\begin{aligned} \ddot{\eta}_0 &= \frac{w}{Ag} = \frac{1}{Ag} \cdot \frac{d^2 y_0}{dt^2} = \\ &= \frac{1}{T^2} \cdot \frac{1}{Ag} \cdot \frac{d^2 y_0}{d\tau^2} = \bar{w} = -T^2\ddot{y}_0. \end{aligned} \quad (4)$$

Для асимптотического анализа уравнений Б. Н. Квасниковым были введены порядки всех безразмерных коэффициентов и переменных дифференциального уравнения. При этом вводится большой параметр μ и все переменные сравниваются с этим параметром, например, $\xi = \mu^{p_\xi}$ означает, что переменная ξ имеет порядок p_ξ по отношению к μ . Будем обозначать порядок p_ξ через $\tilde{\xi}$, а также использовать обозначение $\xi \Rightarrow \tilde{\xi}$. Далее вводится показатель изменчивости функции при дифференцировании:

$$\left(\frac{d\xi}{d\tau}\right) \Rightarrow p_\xi = \tilde{\xi} = \xi + r_\xi. \quad (5)$$

Величина r_ξ называется показателем изменчивости функции ξ .

Уравнение (1) характеризуется двумя параметрами f и γ . На основе анализа порядка членов уравнения (1) и показателей изменчивости функций в [6] плоскость параметров уравнения (f, γ) была разбита на области, в каждой из которых исходное полное уравнение можно заменить на укороченное (рис. 2).

В области 1 укороченное уравнение имеет вид:

$$\ddot{\xi} + 4\pi^2\xi = -T^2\ddot{y}_0; \quad (6)$$

в области 2:

$$\ddot{\xi} + 2\pi\gamma\dot{\xi} = -T^2\ddot{y}_0; \quad (7)$$

в области 3:

$$\ddot{\xi} - f \cdot \text{sign}\dot{\xi} = -T^2\ddot{y}_0. \quad (8)$$

Такое представление названо Б. Н. Квасниковым асимптотическим портретом уравнения.

Асимптотический метод [5] позволяет для каждой точки области асимптотического портрета построить цепочки укороченных уравнений по степени их точности, оценить их погрешности и провести дальнейшую детализацию асимптотического портрета.

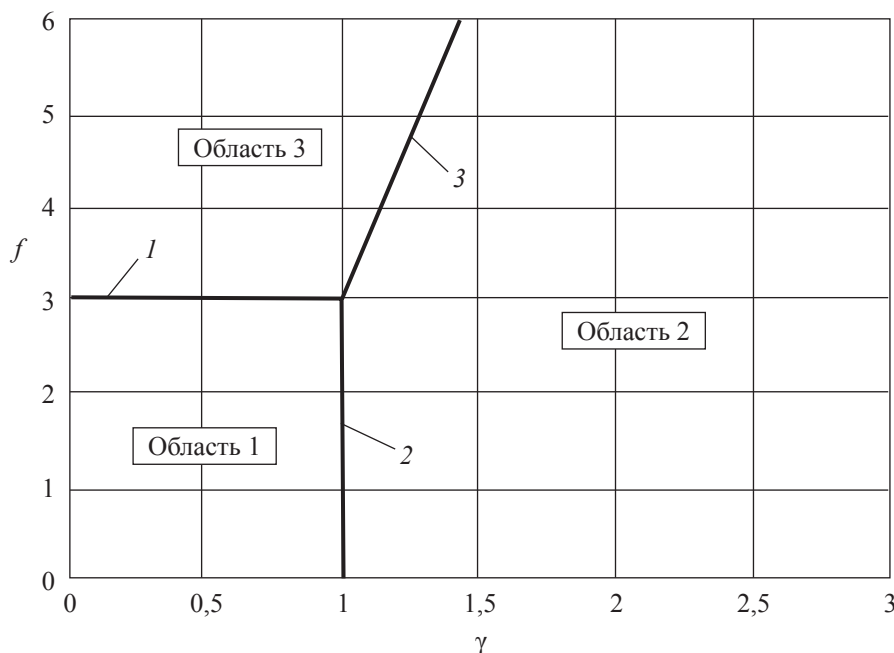


Рис. 2. Асимптотический портрет уравнения колебаний осциллятора с вязким и сухим трением:
1 – прямая $f=3$; 2 – прямая $\gamma=1$; 3 – парабола $f=3\gamma^2$

1.2 Построение подобластей асимптотического портрета уравнения колебаний осциллятора с вязким и сухим трением

Область 1 можно разделить еще на две подобласти: 1А и 1Б. В подобласти 1А асимптотический переход от простейшего укороченного уравнения к полному уравнению осуществляется по следующей схеме:

– нулевое приближение

$$\ddot{\xi} + 4\pi^2\xi = -T^2\ddot{y}_0;$$

– первое приближение

$$\ddot{\xi} + 4\pi^2\xi + 2\pi\gamma\dot{\xi} = -T^2\ddot{y}_0;$$

– второе приближение – полное (точное) уравнение.

В подобласти 1Б асимптотический переход от простейшего укороченного уравнения к полному осуществляется по следующей схеме:

– нулевое приближение

$$\ddot{\xi} + 4\pi^2\xi = -T^2\ddot{y}_0;$$

– первое приближение

$$\ddot{\xi} + 4\pi^2\xi - f \cdot \text{sign}\dot{\xi} = -T^2\ddot{y}_0;$$

– второе приближение – полное (точное) уравнение.

Аналогично можно разделить области 2 и 3 на подобласти 2А, 2Б и 3А, 3Б соответственно.

В подобласти 2А асимптотический переход от простейшего укороченного уравнения к полному осуществляется по следующей схеме:

– нулевое приближение

$$\ddot{\xi} + 2\pi\gamma\xi = -T^2\ddot{y}_0;$$

– первое приближение

$$\ddot{\xi} + 2\pi\gamma\dot{\xi} + 4\pi^2\xi = -T^2\ddot{y}_0;$$

– второе приближение – полное (точное) уравнение.

В подобласти 2Б асимптотический переход от простейшего укороченного уравнения к полному осуществляется по следующей схеме:

– нулевое приближение

$$\ddot{\xi} - f \cdot \text{sign} \dot{\xi} = -T^2 \ddot{y}_0;$$

$$\ddot{\xi} + 2\pi\gamma\dot{\xi} = -T^2 \ddot{y}_0;$$

– первое приближение

$$\ddot{\xi} + 2\pi\gamma\dot{\xi} - f \cdot \text{sign} \dot{\xi} = -T^2 \ddot{y}_0;$$

– второе приближение – полное (точное) уравнение.

В подобласти 3А асимптотический переход от простейшего укороченного уравнения к полному осуществляется по следующей схеме:

– нулевое приближение

$$\ddot{\xi} - f \cdot \text{sign} \dot{\xi} = -T^2 \ddot{y}_0;$$

– первое приближение

$$\ddot{\xi} - f \cdot \text{sign} \dot{\xi} + 2\pi\gamma\dot{\xi} = -T^2 \ddot{y}_0;$$

– второе приближение – полное (точное) уравнение.

В подобласти 3Б асимптотический переход от простейшего укороченного уравнения к полному осуществляется по следующей схеме:

– нулевое приближение

– первое приближение

$$\ddot{\xi} - f \cdot \text{sign} \dot{\xi} + 4\pi^2\xi = -T^2 \ddot{y}_0;$$

– второе приближение – полное (точное) уравнение.

В результате получаем полный асимптотический портрет уравнения, представленный на рис. 3 в координатах f - γ .

2 Асимптотический портрет уравнения колебаний демпфированной системы с типовыми гидравлическими демпферами

2.1 Построение областей асимптотического портрета уравнения колебаний демпфированной системы с типовыми гидравлическими демпферами

Рассмотрим применение метода Б. Н. Квашикова к анализу уравнения демпфированной системы с типовыми гидравлическими

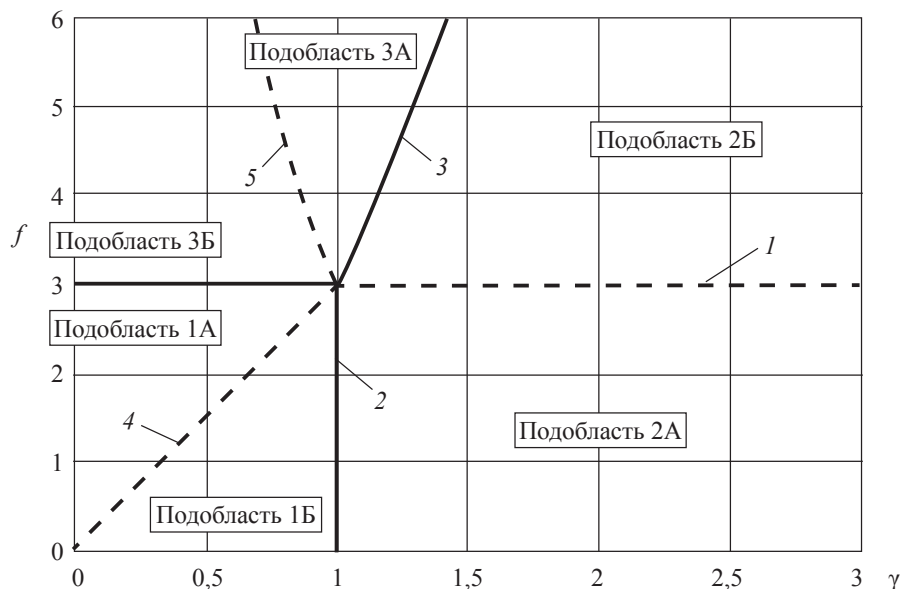


Рис. 3. Асимптотический портрет уравнения колебаний осциллятора с вязким и сухим трением:

1 – прямая $f = 3$; 2 – прямая $\gamma = 1$; 3 – парабола $f = 3\gamma^2$; 4 – прямая $f = 3\gamma$; 5 – гипербола $f = \frac{3}{\gamma^2}$

демпферами, применяемыми для гашения сейсмических колебаний. В этих демпферах сила сопротивления Q записывается в виде:

$$Q = -C|V|^v \operatorname{sign}(V). \quad (9)$$

Сила сопротивления зависит в данном случае от двух параметров C и v . При $v = 0$ получаем сухое трение, при $v = 1$ – вязкое трение, а при $v = 2$ – турбулентное трение. В опорных частях фирм Maurer Söhnes и FIP Industriale $0,1 < v < 0,2$.

Исходное уравнение колебаний записывается при этом в виде:

$$m\ddot{q} + cq + C|V|^v \operatorname{sign}(V) = -m\ddot{y}_0. \quad (10)$$

Запишем уравнение (10) в безразмерных ускорениях η . Для этого поделим обе его части на величину Ag , где g – ускорение свободного падения, $A = -\frac{1}{g}\ddot{y}_0^{\max}$, после чего уравнение (10) примет вид:

$$\frac{1}{Ag}\ddot{q} + \frac{c}{m} \cdot \frac{1}{Ag}q + \frac{C}{mgA}|v|^v \operatorname{sign}(v) = -\frac{1}{Ag}\ddot{y}_0.$$

Здесь:

$$w_0 = \frac{1}{Ag}\ddot{y}_0, \quad \frac{1}{Ag}\ddot{q} = \ddot{\eta},$$

откуда

$$\eta = \frac{q}{Ag} \quad \text{и} \quad \dot{\eta} = \frac{\dot{q}}{Ag}.$$

Окончательно получаем:

$$\ddot{\eta} + \frac{c}{m}\eta + \frac{C}{mgA}Ag|\dot{\eta}|^v \operatorname{sign}(\dot{\eta}) = -w_0. \quad (11)$$

Далее введем безразмерное время τ и запишем уравнение (11) в следующем виде:

$$\xi'' + (2\pi)^2 \xi + (2\pi)^v \chi |\dot{\xi}|^v \operatorname{sign}(\dot{\xi}) = -w, \quad (12)$$

где $\xi = \frac{\eta}{T^2}$ – безразмерное смещение, соот-

ветственно $\dot{\xi} = \frac{\dot{\eta}}{T^2}$, $\ddot{\xi} = \frac{\ddot{\eta}}{T^2}$; T – период коле-

баний, $T = \frac{2\pi}{k}$, $k^2 = \frac{c}{m}$; k – частота колеба-

ний; $w = \frac{\ddot{q}_0}{AgT^2}$; $\frac{C}{m}(Ag)^{v-1} = \chi k^v$.

Обозначим далее первое слагаемое в уравнении (12) символом $P(I)$, второе – символом $P(II)$, третье – символом $P(III)$.

Для асимптотического анализа уравнения (12) по Б. Н. Квасникову введем параметр $\mu = 100$. При этом $4\pi^2 \approx \mu^{0,8} = 100^{0,8}$; $2\pi \approx \approx 100^{0,4}$. Это означает, что число $4\pi^2$ имеет порядок 0,8, а число 2π имеет порядок 0,4.

Тильда над буквой означает ее порядок. Тогда порядки переменных представляются следующим образом:

$$\tilde{\xi} = \xi + r(\xi) \quad r(\xi) = 0,4 \quad \tilde{\xi} = \xi + 0,4$$

$$\tilde{\xi} = \xi + 2r(\xi) \quad \tilde{\xi} = \xi + 0,8.$$

Порядки слагаемых в уравнении (12) имеют вид:

– для первого слагаемого

$$P(I) = \tilde{\xi} + 0,8;$$

– для второго слагаемого

$$P(II) = P\left\{(2\pi)^v \chi \dot{\xi}^v\right\} = 0,4v + \tilde{\chi} + (\tilde{\xi} + 0,4)v.$$

Вторым слагаемым, описывающим силы сопротивления в демпфере, можно пренебречь при условии:

$$P(III) < P(I), \quad \text{откуда} \quad \tilde{\chi} < (1-v)(\tilde{\xi} + 0,8).$$

Для коэффициента динамичности $\beta \approx 3$ $\tilde{\xi} = -0,56$ и $\tilde{\chi} < (1-v) \cdot 0,24$, откуда получаем $\tilde{\chi} < 3^{(1-v)}$ – область (1), в которой можно пренебречь демпфером.

Рассмотрим далее укороченные уравнения при учете демпфера.

Обозначим в уравнении (12) $b = (2\pi)^v \chi$.

Для замены полученного уравнения (12) эквивалентным уравнением с вязким сопротивлением в соответствии с [7], должно выполняться следующее условие:

$$b|\ddot{\xi}|^{\nu} \operatorname{sign}(\dot{\xi}) \approx (\beta|\dot{\xi}| + f) \operatorname{sign}(\dot{\xi}). \quad (13)$$

В этом условии:

$$\begin{cases} \beta = 2\pi\gamma = \nu b = \nu(2\pi)^{\nu} \chi \\ f = b(1-\nu) = (2\pi)^{\nu} \chi(1-\nu) \end{cases} \quad (14)$$

или

$$\begin{cases} \gamma = \nu(2\pi)^{\nu-1} \chi \\ f = (2\pi)^{\nu} (1-\nu)\chi. \end{cases} \quad (15)$$

Представим области, полученные Б. Н. Квазниковым в параметрах (f, γ) , в параметрах (ν, χ) . Для этого в ограничения [7], выраженные в параметрах b, f, γ , подставим равенства (15) и решим эти неравенства относительно неизвестных ν и χ .

Область 1 характеризуется, согласно [6], условиями:

$$\begin{cases} \gamma < 1 \\ f < 3. \end{cases} \quad (16)$$

После подстановки в (16) выражений (15) получаем:

$$\begin{cases} \nu(2\pi)^{\nu-1} \chi < 1 \\ (2\pi)^{\nu} (1-\nu)\chi < 3. \end{cases} \quad (17)$$

Решая систему неравенств (17), получаем ограничения, выделяющие на асимптотическом портрете область 1 в параметрах χ и ν :

$$\begin{cases} \chi < \frac{1}{\nu(2\pi)^{\nu-1}} \\ \chi < \frac{3}{(2\pi)^{\nu} (1-\nu)}. \end{cases} \quad (18)$$

В этой области можно пренебречь и сухим, и вязким трением. Уравнение движения здесь – это уравнение (6).

Область 2 описывается следующей системой неравенств:

$$\begin{cases} \gamma > 1 \\ f < 3\gamma^2. \end{cases} \quad (19)$$

После аналогичной подстановки получаем:

$$\begin{cases} \chi > \frac{1}{\nu(2\pi)^{\nu-1}} \\ \chi > \frac{1-\nu}{3\nu^2(2\pi)^{\nu-2}}. \end{cases} \quad (20)$$

Область 3 –

$$\begin{cases} f > 3 \\ f > 3\gamma^2 \end{cases} \quad (21)$$

или после подстановки:

$$\begin{cases} \chi < \frac{1-\nu}{3\nu^2(2\pi)^{\nu-2}} \\ \chi > \frac{3}{(2\pi)^{\nu} (1-\nu)}. \end{cases}$$

Описанные выше области представлены на рис. 4.

2.2 Построение подобластей асимптотического портрета уравнения колебаний демпфированной системы с типовыми гидравлическими демпферами

Далее разделим области 1, 2 и 3 на подобласти 1А и 1Б, 2А и 2Б, 3А и 3Б соответственно.

В подобласти 1А выполняется неравенство $f < 3\gamma$.

Подставив выражения (15) в (18), получим:

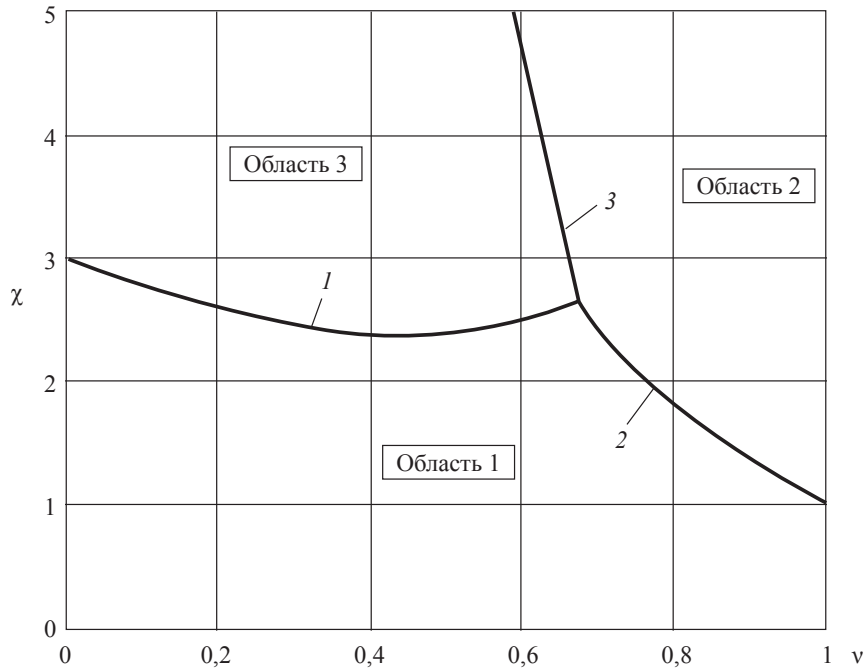


Рис. 4. Асимптотический портрет уравнения колебаний осциллятора с вязким и сухим трением:

$$1 - \text{кривая } \chi = \frac{3}{(2\pi)^v (1-v)}; \quad 2 - \text{кривая } \chi = \frac{1}{v(2\pi)^{v-1}}; \quad 3 - \text{кривая } \chi = \frac{1-v}{3v^2 (2\pi)^{v-2}}$$

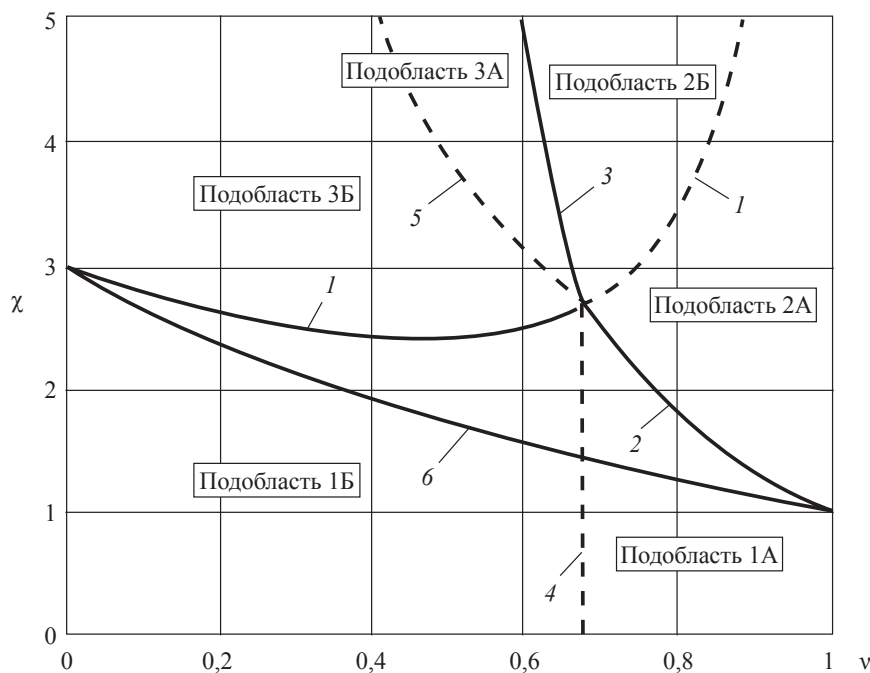


Рис. 5. Асимптотический портрет уравнения колебаний осциллятора с вязким и сухим трением:

$$1 - \text{кривая } \chi = \frac{3}{(2\pi)^v (1-v)}; \quad 2 - \text{кривая } \chi = \frac{1}{v(2\pi)^{v-1}}; \quad 3 - \text{кривая } \chi = \frac{1-v}{3v^2 (2\pi)^{v-2}};$$

$$4 - \text{прямая } v = \frac{2\pi}{2\pi+3}; \quad 5 - \text{кривая } \chi = \sqrt[3]{\frac{3}{v^2 (2\pi)^{3v-2} (1-v)}}; \quad 6 - \text{кривая } \chi = 3^{1-v}$$

$$v > \frac{2\pi}{3 + 2\pi}. \quad (23)$$

Разделителем области 2 является линия $f = 3$ или

$$\chi = \frac{3}{(2\pi)^v (1-v)}. \quad (24)$$

Подобласть 2А располагается ниже кривой (24).

Область 3 разделяется кривой:

$$f = \frac{3}{\gamma^2} \quad (25)$$

или в новых параметрах:

$$\chi = \sqrt[3]{\frac{3}{v^2 (2\pi)^{3v-2} (1-v)}}. \quad (26)$$

В результате получаем полный асимптотический портрет уравнения, представленный на рис. 5 в координатах χ - v .

Заключение

Приведенный в статье пример анализа нелинейного дифференциального уравнения показывает высокую наглядность использования асимптотического метода профессора Б. Н. Квасникова для анализа дифференциальных уравнений. В статье рассмотрен только первый этап предлагаемого Б. Н. Квасниковым анализа – построение асимптотического портрета уравнения. Имея такой портрет, инженер на начальном этапе

проектирования получает возможность оценки параметров колебаний системы, используя укороченные уравнения движения. Далее с использованием цепочки укороченных уравнений могут быть построены приближения решения основного уравнения.

Библиографический список

1. **О применимости** уравнения кубической параболы в качестве переходной кривой на железных дорогах колеи 1524 и 750 мм / Б. Н. Квасников. – Ленинград : ЛИИЖТ, 1957. – 17 с.
2. **Асимптотический** метод построения и решения укороченных уравнений тонких оболочек / Б. Н. Квасников // Колебания и устойчивость механических систем. – 1981. – Вып. 5. – С. 187–218.
3. **Теоремы** аппроксимации и существования в теории тонких оболочек / Б. Н. Квасников // Третьи Поляховские чтения. Избранные труды Международной научной конференции по механике. – Санкт-Петербург : Изд-во НИИХ СПбГУ, 2003. – С. 261–266.
4. **Использование** асимптотического метода построения «укороченных» уравнений сейсмических колебаний сооружений на кинематических фундаментах / Б. Н. Квасников, С. Н. Коузах // Экспресс-информация ВНИИИС. Сер. 14. Сейсмостойкое строительство. – 1996. – Вып. 4. – С. 50–55.
5. **Асимптотический** анализ уравнений колебаний сейсмоизолированной системы с демпфером сухого трения и его приложения / В. В. Верховин, Б. Н. Квасников, Е. А. Рулевич, А. М. Уздин // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. – 2004. – № 1. – С. 32–36.