

распространенных моделей с экспоненциальными аппроксимациями.

Дальнейшее развитие программного комплекса предусматривает добавление возможностей по работе с моделями, где распределения имеют комплексно-сопряженные параметры, расширение перечня рассчитываемых вероятностных характеристик и интеграционных возможностей комплекса.

### Библиографический список

1. **Теория** массового обслуживания / Л. Клейнрок ; ред. В. И. Неймана ; пер. с англ. – Москва : Машиностроение, 1979. – 432 с.
2. **Модель** оценивания оперативности распределенной обработки данных с учетом затрат на обеспечение информационной безопасности / С. И. Гиндин, А. Д. Хомоненко, В. В. Яковлев, С. В. Матвеев // Проблемы информационной безопасности. Компьютерные системы. – 2013. – № 4. – С. 59–67.
3. **Численный** расчет многоканальной системы массового обслуживания с рекуррентным входящим потоком и «разогревом» / С. И. Гиндин, А. Д. Хомоненко, С. Е. Адауров // Известия ПГУПС. – 2013. – № 4 (37). – С. 92–101.
4. **Численные** методы анализа систем и сетей массового обслуживания / А. Д. Хомоненко. – Санкт-Петербург : МО СССР, 1991. – 179 с.
5. **Теория** очередей и управление запасами / Ю. И. Рыжиков. – Санкт-Петербург : Питер, 2001. – 384 с.
6. **Cox, D. R.** (1955). A use of complex probabilities in the theory of stochastic processes. Proceedings of Cambr. Phil. Soc., 51 (2), 313–319.
7. **Takanashi, U., Takami, Y.** (1976). A numerical method for the steady-state probabilities of a GI/G/c queuing system in a general class. Journal of the Operat. Res. Soc. of Japan, 19 (2), 147–157.
8. **Итеративный** расчет многоканальных систем с произвольным распределением времени обслуживания. / Ю. И. Рыжиков, А. Д. Хомоненко // Проблемы управления и теории информации. – 1980. – № 3. – С. 32–38.
9. **Canadilla, P.** (2013). Analysis of Queueing Networks and Models, available at: <http://cran.r-project.org/web/packages/queueing/index.html>
10. **Пакет** прикладных программ МОСТ для расчета стационарных режимов в системах массового обслуживания. – Эстонское НИИ ВТИ, 1988.
11. **Hicklin, J., Moler, C.** (2008). A Java Matrix Package, available at: <http://math.nist.gov/javanumerics/jama/>

УДК 534.12

### А. В. Индейкин

Петербургский государственный университет путей сообщения  
Императора Александра I

## ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЕВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ПРИ ДЕЙСТВИИ СТАЦИОНАРНЫХ И ПОДВИЖНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ НАГРУЗОК

Рассматриваются параметрические колебания стержней строительных конструкций, их взаимодействие с общими колебаниями конструкции. Для анализа используются декомпозиционные модели стержневых элементов. В качестве источников местных колебаний рассматриваются кинематические возмущения концов стержней при общих вынужденных колебаниях конструкций, вызванных стационарными и подвижными нагрузками, действующими на конструкцию.

Рассмотрен случай, когда кинематические возмущения заданы гармоническими и полигармоническими функциями времени. Произведена оценка степени возрастания амплитуд резонансных параметрических колебаний при воздействии на конструкцию подвижных динамических нагрузок. Исследовано взаимодействие вынужденных и параметрических колебаний стержневых элементов конструкций.

стержневой элемент, строительная конструкция, кинематическое возмущение, параметрический резонанс, декомпозиционная модель (расчетная схема), коэффициент возбуждения, линия влияния.

## Введение

Вопросы динамической устойчивости и параметрических колебаний отдельных стержней, подвергающихся воздействию переменных продольных сил, достаточно полно представлены в научной литературе [1–3 и др.].

Однако при действии на некоторые строительные конструкции (например, решетчатые фермы) систем стационарных и подвижных переменных сил в стержневых элементах возникает возможность потери динамической устойчивости под воздействием кинематических возмущений концов стержня при общих колебаниях конструкции.

При исследовании этих динамических процессов перспективным представляется метод декомпозиции, позволяющий получить приближенные решения в замкнутой форме и проанализировать динамические процессы в строительных конструкциях с точки зрения динамической устойчивости стержневых элементов, входящих в их состав.

## 1 Исследование колебаний стержней конструкции при помощи декомпозиционных схем

Динамические расчеты строительных конструкций, производимые с помощью современных вычислительных комплексов, а также результаты натурных наблюдений показывают, что при рассмотрении высших форм свободных колебаний стержневых конструкций выделяются группы однотипных элементов, принимающих участие в опреде-

ленной форме колебаний. При этом другие стержни не колеблются.

Это явление позволяет скорректировать декомпозиционные расчетные схемы стержневых элементов путем согласования значений основных частот колебаний стержня, рассчитанных по декомпозиционной модели и полученных в результате исследования общих свободных колебаний стержневой конструкции [4].

Декомпозиционная расчетная схема стержневого элемента в виде стержня представляется в виде стержня, упруго заделанного в подвижных узлах, колеблющихся вместе с конструкцией.

Колебания узлов являются кинематическими возмущениями для рассматриваемого стержня (рис. 1).

Кинематические возмущения от колебаний узлов можно разделить на поперечные по отношению к стержню  $v_i$  и продольные  $u_i$ :

$$v_i = h_i \cos \alpha_i + g_i \sin \alpha_i;$$

$$u_i = g_i \cos \alpha_i - h_i \sin \alpha_i,$$

где ( $i = 1, 2$ ).

Продольное кинематическое возмущение эквивалентно силовому

$$S(t) = \frac{EF}{\ell} [u_2(t) - u_1(t)]. \quad (1)$$

При учете поперечных смещений узлов колебания стержневых элементов конструкции описываются неоднородной системой дифференциальных уравнений, соответствующей однородной системе уравнений В. Н. Челомея [2]:

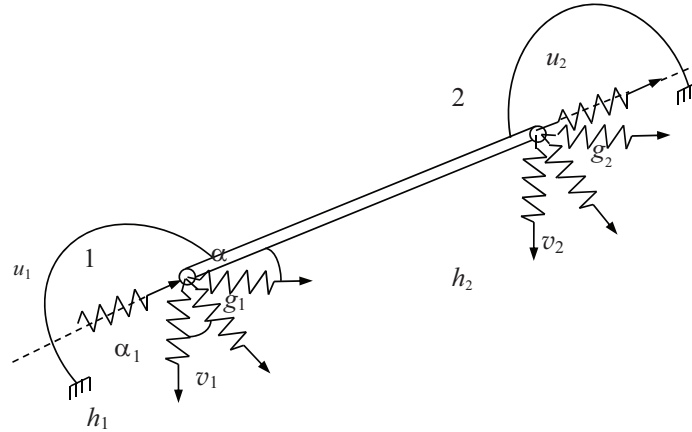


Рис. 1. Расчетная схема

$$\ddot{\varphi}_1 + \bar{\Omega}_i^2 \left[ q_i - S(t) \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} q_k \right] = -\frac{\ddot{v}_1 + \ddot{v}_2}{2} \cdot \frac{\int_0^{\ell} \varphi_i(x) dx}{\int_0^{\ell} \varphi_i^2(x) dx}, \quad i = 1, 2, \dots, \infty, \quad (2)$$

где  $\alpha_j = \frac{c_j \ell}{EI}$ ,  $j = 1, 2$ ;  $c_j$  – угловой коэффициент жесткости концевых защемлений;  $G_i(\Theta)$ ,  $F_i(\Theta)$ ,  $H_i(\Theta)$  – функции Гогенмзера–Прагера вида

$$F_i(\Theta) = ch \Theta_i \sin \Theta_i - sh \Theta_i \cos \Theta_i;$$

$$G_i(\Theta) = ch \Theta_i \sin \Theta_i - 1;$$

$$H_i(\Theta) = 2sh \Theta_i \sin \Theta_i.$$

где  $\bar{\Omega}_i^2 = \frac{EI}{m \ell^4} \Theta_i^2$ ;

$\Theta_i$  – собственное значение дифференциального оператора уравнения колебаний системы в отсутствие параметрической нагрузки  $S(t)$ ;

$$a_{ik} = \frac{1}{\bar{\Omega}_i^2} \int_0^{\ell} \frac{d\bar{\varphi}_i(x)}{dx} \cdot \frac{d\bar{\varphi}_k(x)}{dx} dx;$$

$$\bar{\varphi}_i(x) = \frac{\varphi_i(x)}{\sqrt{m \int_0^{\ell} \varphi_i^2(x) dx}} - \text{нормированные собственные функции упомянутого выше оператора.}$$

При стержне с упругим относительно угловых перемещений защемлением концов значения  $\Theta_i$  определяются как корни трансцендентно-алгебраического значения

$$-\frac{\alpha_1 \alpha_2}{\Theta_i^2} G_i(\Theta) + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\Theta_i} F_i(\Theta) + H_i(\Theta) = 0, \quad (3)$$

Соответствующие значениям  $\Theta_i$  собственные функции имеют вид:

$$\varphi_i(x) = \sin \Theta_i \frac{x}{\ell} + A_i \left( ch \Theta_i \frac{x}{\ell} - \cos \Theta_i \frac{x}{\ell} \right) - B_i sh \Theta_i \frac{x}{\ell}, \quad (4)$$

где

$$B_i = \frac{\sin \Theta_i + \frac{\alpha_i}{2\Theta_i} (ch \Theta_i - \cos \Theta_i)}{sh \Theta_i + \frac{\alpha_i}{2\Theta_i} (ch \Theta_i - \cos \Theta_i)};$$

$$A_i = \frac{\alpha_i}{2\Theta_i} (1 - B_i).$$

На рис. 2 представлена зависимость собственных значений  $\Theta_1$  от коэффициентов  $\alpha$  в случае  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ .

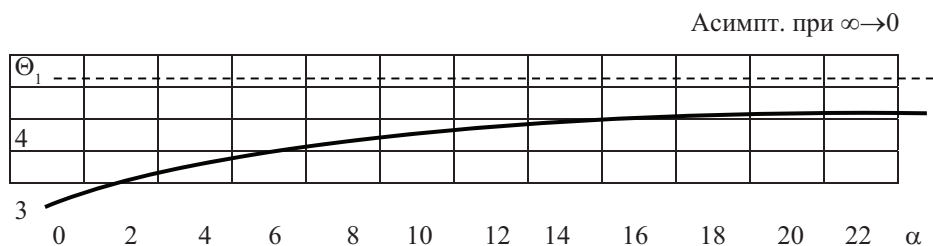


Рис. 2. Зависимость собственных значений  $\Theta_1$  от коэффициентов упругой заделки

Значения  $\alpha_i$  можно приближенно определять по формуле [5], [6]:

$$\alpha_i \approx 3,5 \sum_{v=1}^n \frac{I_v}{I} \cdot \frac{\ell}{\ell_v}, \quad (5)$$

где  $I_v$  и  $\ell_v$  – соответственно, момент инерции и длина  $v$ -го стержня, защемляющего данный стержень в узле;  $n$  – число таких стержней в узле.

На рис. 3 показана одна из высших форм колебаний решетчатой фермы пролетного строения моста с расчетным пролетом  $\ell = 110$  м.

Значения коэффициентов упругой заделки  $\alpha_1, \alpha_2$ , радианных частот  $\theta_1$  и  $\tilde{\theta}_1$ , полученных при рассмотрении декомпозиционной схемы и расчетной схемы общих вибраций фермы, соответственно, квадратов частот свободных колебаний стержней  $\Omega_1^2$  и соотношений между  $\frac{\tilde{\theta}_1}{\theta_1}$ , а также  $\frac{\pi}{\theta_1}$ , характеризующих степень упругой заделки и отличие реальной конструкции от классической схемы фермы с шарнирными узлами.

Приведенные в таблице значения параметров показывают удовлетворительное совпадение общих вибраций ферм с применением

вычислительного комплекса COSMOS/M и декомпозиционной схемы отдельного стержневого элемента с учетом его упругой заделки в узлах фермы.

Если  $\theta_1 < 3,70$ , появляется возможность приближенного интегрирования уравнений системы (2) независимо друг от друга.

Следует иметь в виду, что в указанном случае и в ряде других, представляющих практический интерес, матрица коэффициентов  $a_{ik}$  близка к диагональной, это позволяет упростить интегрирование системы (2) и даже приближенно интегрировать уравнения системы независимо друг от друга [7].

## 2 Исследование режимов главных параметрических резонансов

Если стержень загружен переменной продольной силой  $S(t) = S_0 + S_t$  и его шарнирные узлы совершают заданное поперечное движение  $v_1(t)$  и  $v_2(t)$ , дифференциальное уравнение его колебаний в первом приближении имеет вид

$$\ddot{q} + \Omega^2 [1 \pm 2\mu(t)] q = -\frac{2}{\pi} (\ddot{v}_1 + \ddot{v}_2), \quad (6)$$

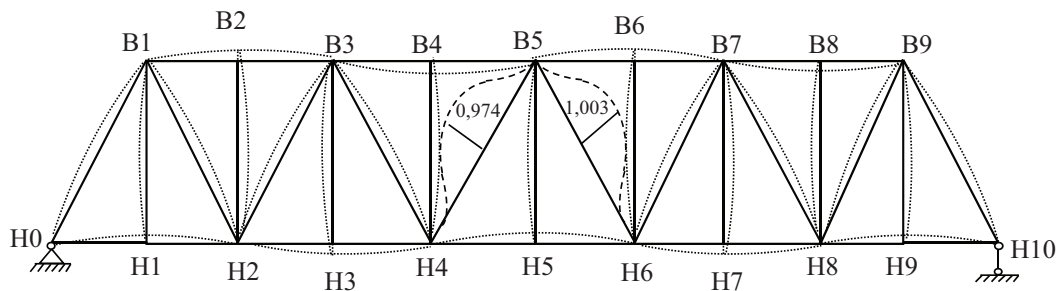


Рис. 3. Высшая форма колебаний фермы

ТАБЛИЦА. Динамические характеристики стержневых элементов

Обозначение стержня на рис. 3	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\theta_1$	$\Omega_1^2$ (рад/с) <sup>2</sup>	$\tilde{\theta}_1$	$\frac{\tilde{\theta}_1}{\theta_1}$	$\frac{\pi}{\theta_1}$
H0–B1	0	7,94	3,65	2214,6	3,358	0,92	0,936
B1–H2	23,08	32,71	4,37	4180,8	4,168	0,95	0,754
H8–B9	32,71	34,08	4,37	4392,5	4,219	0,97	0,744
B9–H10	7,94	0	3,65	2594,9	3,494	0,96	0,899
H4–B5	89,81	77,39	4,40	2178,1	4,228	0,96	0,743
B5–H6	77,39	89,81	4,40	2208,2	4,242	0,96	0,741
H2–H3	7,10	10,75	3,96	17590	3,662	0,92	0,858
H8–H9	10,75	7,10	3,96	15746	3,569	0,90	0,880
H4–H5	8,85	8,11	3,93	18905	3,728	0,95	0,843
H5–H6	8,11	8,85	3,93	20289	3,794	0,97	0,828
B1–B2	9,19	8,10	3,94	12453	3,327	0,85	0,944
B8–B9	8,10	9,19	3,94	12171	3,308	0,84	0,950
B4–B5	8,10	8,92	3,93	9111,9	3,154	0,80	0,996
B1–H1	340,0	318,0	4,71	1524,8	4,380	0,93	0,717
B5–H5	346,2	363,6	4,71	1554,8	4,403	0,93	0,713
B9–H9	340,0	318,0	4,71	1582,4	4,442	0,94	0,710

где

$$\Omega^2 = \frac{EI \pi^4}{m \ell^4} \left( 1 \pm \frac{S_0}{S_{кр}} \right);$$

$$2\mu(t) = \frac{S_t}{S_{кр} \pm S_0},$$

причем знак «+» относится к случаю растянутого стержня, знак «-» – сжатого;  $S_{кр} = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2}$  – Эйлера критическая сила;  $\ell$  – длина стержня;  $m$  – его погонная масса.

Однородное уравнение, соответствующее уравнению (6) при  $\mu(t) = \mu \cos \omega t$  является уравнением Матье и описывает параметрические колебания стержневого элемента конструкции

$$\ddot{q} + \Omega^2 [1 - 2\mu \cos \omega t] q = 0. \quad (7)$$

Как известно, при значении частоты возбуждения

$$\omega_* = 2\Omega \sqrt{1 \pm \mu} \quad (8)$$

имеет место главный параметрический резонанс [6].

При этом амплитуда параметрических колебаний возрастает во времени по экспоненциальному закону

$$A = A_0 e^{\nu t}. \quad (9)$$

При отсутствии сопротивления максимальное значение показателя экспоненты  $\nu_{\max} = \frac{\mu \Omega}{2}$ . Следовательно,

$$A = A_0 e^{\frac{\mu \Omega t}{2}}. \quad (10)$$

При учете вязкого сопротивления дифференциальное уравнение Матье принимает вид

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + \Omega^2 [1 - 2\mu \cos \omega t] q = 0. \quad (11)$$

Значения критических частот, соответствующие границам первой (главной) области динамической неустойчивости при параметрическом резонансе:

$$\omega_* = 2\Omega \sqrt{1 \pm \sqrt{\mu^2 - \left(\frac{\Delta}{\pi}\right)^2}}, \quad (12)$$

где  $\Delta$  – логарифмический декремент местных свободных колебаний стержня.

Значение экспоненциального показателя возрастания амплитуды в этом случае:

$$\begin{aligned} v_{\max} &= \frac{\mu\Omega}{2} - n = \frac{\mu\Omega}{2} - \frac{\Delta}{\pi} = \\ &= \frac{\Omega}{2} \left( \mu - \frac{\Delta}{\pi} \right) = \frac{\Omega}{2} (\mu - \mu_*), \end{aligned} \quad (13)$$

где  $\mu_* = \frac{\Delta}{\pi}$  – критическое значение коэффициента возбуждения, при превышении которого наступает динамическая неустойчивость.

Если коэффициент  $\mu(t)$ , представленный рядом Фурье  $\mu(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \cos k\omega t$ , носит периодический характер, критические значения частот, соответствующие параметрическим резонансам, определяются выражением [3]

$$\omega_* = \frac{2\Omega}{k} \sqrt{1 \pm \mu_k}. \quad (14)$$

При полигармоническом процессе возбуждения:

$$\mu(t) = \sum_{k=1}^s \mu_k \cos \omega_k t, \quad (15)$$

при котором значения  $\omega_k$  не кратны  $k$ ,

$$\omega_{*k} = 2\Omega \sqrt{1 \pm \mu_k}. \quad (16)$$

В последнем случае пренебрегли влиянием высших форм колебаний и комбинационных параметрических резонансов.

### 3 Вычисление продольных переменных усилий в стержнях при динамическом нагружении конструкции

При стационарном приложении гармонической нагрузки в узлах фермы усилие в стержне, колебания которого рассматриваются по декомпозиционной схеме, определяются выражением

$$S_j(t) = \sum_{k=1}^n \alpha_{jk} P_k(\omega t), \quad (17)$$

где  $\alpha_{jk}$  – коэффициенты влияния, учитывающие воздействия в  $k$ -м узле фермы.

Учитывая характер формы колебаний фермы (рис. 3), значения  $\alpha_{jk}$  определяются квазистатически.

Аналогично можно вычислить значения  $S_j(t)$  в случае периодической узловой нагрузки общего вида, представляемой рядом Фурье.

Если в различных узлах фермы приложены узловые нагрузки (силы), изменяющиеся по гармоническому закону с различными частотами  $\omega_k$ , то усилие в  $j$ -м стержне фермы описывается полигармоническим процессом

$$S_j(t) = \sum_{k=1}^n \alpha_{jk} P_k(\omega_k t). \quad (18)$$

При возбуждении параметрических колебаний стационарными силами, приложенными в узлах фермы и действующими в течение неопределенного промежутка времени, единственным способом виброзащиты является исключение возможности возникновения параметрических колебаний путем повышения параметров демпфирования (коэффициента затухания  $n$ ) с тем, чтобы было обеспечено неравенство

$$\mu_* < \mu_k. \quad (19)$$

Такими способами виброзащиты могут стать, например, лакокрасочное покрытие стержней материалами, обладающими высокой степенью поглощения энергии колебаний в поверхностном слое, а также совершенствование конструкций узлов – соединения стержней фермы в узлах на высокопрочных болтах вместо заклепочных соединений.

В случае воздействия подвижной нагрузки усилие в узлах фермы определяется выражением

$$S(t) = P \Psi(t) \eta(vt), \quad (20)$$

где  $\eta(vt)$  – ордината линии влияния усилия в стержне фермы от амплитудного значения движущейся переменной силы  $P(t)$ .

Разложим уравнение линии влияния  $\eta(vt)$  в ряд Фурье по  $\sin npt$ , продолжив функцию нечетным образом:

$$\eta(vt) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n \sin npt, \quad (21)$$

где  $p = \frac{\pi v}{\ell}$ ;  $\ell$  – расчетный пролет фермы;

$v = \text{const}$  – скорость движения нагрузки.

Значения коэффициентов Фурье:

- для однозначной линии влияния

$$h_n = \frac{2\eta}{n^2 \pi^2 \alpha_0 (1 - \alpha_0)} \sin \alpha_0 n\pi; \quad (22)$$

- для двузначной линии влияния

$$h_n = \frac{2}{n^2 \pi^2 (\beta_0 - \alpha_0)} \times \left[ \left( \eta_1 \frac{\beta_0}{\alpha_0} + \eta_2 \right) \sin \alpha_0 n\pi - \left( \eta_1 + \eta_2 \frac{1 - \alpha_0}{1 - \beta_0} \right) \sin \beta_0 n\pi \right]. \quad (23)$$

В выражениях (22) и (23):  $\eta$ ,  $\eta_1$ ,  $\eta_2$  – абсолютные значения ординат вершин линии

влияния,  $\alpha_0 = \frac{\xi_1}{\ell}$ ,  $\beta_0 = \frac{\xi_2}{\ell}$ ,  $\xi_1$  и  $\xi_2$  – соответствующие абсциссы вершин.

При движении по поясу фермы силы  $P(t) = P \cos \omega t$  переменное усилие в стержне фермы определяется выражением

$$S(t) = P \cos \omega t \sum_{n=1}^{\infty} h_n \sin npt = \frac{P}{2} \sum_{n=1}^{\infty} h_n (\sin \omega_{1n} t - \sin \omega_{2n} t), \quad (24)$$

где  $\omega_{1n} = \omega + np = \omega + \frac{n\pi v}{\ell}$ ;

$\omega_{2n} = \omega - np = \omega - \frac{n\pi v}{\ell}$ .

Значение коэффициента  $\mu(t)$  в уравнении (6) в этом случае:

$$\mu(t) = \frac{P}{4(S_{\text{кр}} \pm S_0)} \times \sum_{n=1}^{\infty} h_n (\sin \omega_{1n} t - \sin \omega_{2n} t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n (\sin \omega_{1n} t - \sin \omega_{2n} t), \quad (25)$$

где  $\mu_n = \frac{P}{4(S_{\text{кр}} \pm S_0)}$ .

Частоты  $\omega_{1n}$  и  $\omega_{2n}$  являются модулированными при несущей частоте  $\omega$ .

В первом приближении критические частоты, соответствующие одночастотным параметрическим резонансам, определяются выражением

$$\omega_* = 2\Omega \sqrt{1 \pm \mu_n} \mp \frac{n\pi v}{\ell}. \quad (26)$$

Несущие частоты пропорциональны скорости движения нагрузки, если источником возмущения являются силы инерции неуравновешенных вращающихся масс, связанных с перемещающимся по форме объектом (поездом – для ферм железнодорожных мостов, грузовыми тележками – для ферм мостовых

кранов и др.), т. е.  $\omega = \frac{v}{R}$ , где  $R$  – радиус колес.

В этом случае

$$\omega_{(1,2)n} = \omega \left( 1 \pm \frac{n\pi R}{\ell} \right); \quad (27)$$

и

$$\omega_* = \frac{2\Omega}{1 \pm \frac{n\pi R}{\ell}} \sqrt{1 \pm \mu_n}. \quad (28)$$

Как правило,  $\frac{\pi R}{\ell} \ll 1$ . Например, при движении вагона ( $R = 0,525$  м) для расчетных пролетов ферм  $\ell = 33$ – $110$  м значение  $\frac{\pi R}{\ell}$  составляет 0,005–0,015.

В этом случае области динамической неустойчивости концентрируются вокруг области  $\omega_* = 2\Omega \sqrt{1 \pm \mu_1}$ , ширина этих областей по мере разбегания вокруг значения  $\omega_* = 2\Omega$  убывает с ростом  $n$ , так как существенно уменьшаются коэффициенты Фурье  $h_n$ .

#### 4 Критические скорости подвижной нагрузки и оценка амплитуд параметрических колебаний

С помощью выражения (28) можно определить критические скорости движения груза по ферме:

$$v_* = \omega_* R = \frac{2\Omega R \sqrt{1 \pm \mu_n}}{1 \pm \frac{n\pi R}{\ell}}. \quad (29)$$

Так как колебания стержней высших ферм являются высокочастотными, критические скорости движения нагрузки по железнодорожному мосту реализуются только в режиме высокоскоростного движения [4].

Возрастание во времени амплитуд резонансных параметрических колебаний происходит без учета сопротивления по экспоненциальному закону с показателем  $\nu = \frac{\mu\Omega}{2}$ :

$$A = A_0 e^{\nu t} = A_0 e^{\frac{\mu_n \Omega t}{2}}. \quad (30)$$

Время движения груза по пролету фермы ограничено:

$$t = \frac{\ell}{v_{кр}} = \frac{\ell \left( 1 \pm \frac{n\pi R}{\ell} \right)}{2\Omega R \sqrt{1 \pm \mu_n}}. \quad (31)$$

Следовательно, значение показателя экспоненты при этом

$$\nu = \frac{\mu_n \ell}{4R} \frac{1 \pm \frac{n\pi R}{\ell}}{\sqrt{1 \pm \mu_n}} \approx \frac{\mu_n \ell}{4R}. \quad (32)$$

Для пролетного строения с решетчатыми фермами большого железнодорожного моста при  $\mu_n = 0,03$ ,  $\ell = 110$  м,  $R = 0,525$  м значение  $\nu$  составляет 1,57 и  $\frac{A}{A_0} = 4,806$ ; для ферм мостового крана при  $\mu = 0,03$ ,  $\ell = 36$  м,  $R = 0,3$  м значение  $\nu = 0,9$  и  $\frac{A}{A_0} = 2,46$ .

В обоих случаях имеет место существенное возрастание амплитуд колебаний даже при относительно малом коэффициенте возбуждения  $\mu_n$ .

Следует отметить, что параметрические резонансы стержневых элементов ферм могут реализовываться лишь в высших формах колебаний, так как являются высокочастотными.

При этом не происходит существенного наложения параметрических и вынужденных колебаний стержней, так как критические частоты в два раза превышают частоты колебаний стержня, при которых может возникнуть обычный резонанс ( $\omega = \Omega$ ). Вынужденные колебания при этом происходят в закритической области, где динамический коэффициент меньше единицы (в рассматриваемом случае он составляет 0,33).

При исследовании вынужденных колебаний можно пренебречь влиянием переменной частоты свободных колебаний и вос-



пользоваться уравнением (6) при значении  $\mu = 0$ . Значения кинематических возмущений концов стержня можно определить из анализа общих вибраций фермы, для исследования которых следует применить известные методы динамики сооружений или воспользоваться соответствующими вычислительными комплексами (например, COSMOS/M).

### Заключение

В итоге анализа полученных результатов исследования местных параметрических колебаний стержней:

1. Показана эффективность применения метода декомпозиции.

2. Получены оценки показателей возрастания амплитуд параметрических колебаний стержневых элементов конструкции при воздействии на нее подвижной динамической нагрузки в виде сосредоточенных сил. Эти показатели оказываются высокими даже с учетом малых значений коэффициентов возбуждения  $\mu$  и ограниченного времени нахождения силовой нагрузки на конструкции  $t = \frac{\ell}{v_{кр}}$ .

3. Взаимодействие вынужденных и параметрических колебаний стержневых эле-

ментов в резонансных режимах существенным образом не выражено.

### Библиографический список

1. **Устойчивость** призматических стержней под действием переменных продольных сил / Н. М. Беляев // Инженерные сооружения и строительная механика : сб. – Ленинград, 1924. – С. 149–167.
2. **Динамическая** устойчивость авиационных конструкций / В. Н. Челомей. – Москва : Аэрофлот, 1939.
3. **Динамическая** устойчивость упругих систем / В. В. Болотин. – Москва : ГИТТЛ, 1956.
4. **Indejkin, A. V., Fedotova, I. A.** The rod elements oscillations of the railway truss bridge in the conditions of high-speed motion of the load. Proceedings of the third European conference on structural dynamics: Eurodyn'96, 1996, Florence, 783–789.
5. **Определение** характеристик защемления элементов сооружений методом частот / И. И. Казей // Тр. ЦНИИС. – Москва : Трансжелдориздат, 1955. – Вып. 3. – С. 60–75.
6. **Продольно-поперечный** изгиб гибких призматических стержней / В. П. Польевко // Тр. ЦНИИС. – Москва : Трансжелдориздат, 1955. – Вып. 16.
7. **Прочность, устойчивость, колебания.** Т. 3. – Москва : Машиностроение, 1968.

УДК 624.21.01

### С. Ю. Каптелин

Петербургский государственный университет путей сообщения  
Императора Александра I

## ИСПЫТАНИЕ СООРУЖЕНИЙ ДИНАМИЧЕСКИМИ НАГРУЗКАМИ

Для обеспечения безопасной эксплуатации мостового сооружения необходима достоверная информация о динамических воздействиях на несущие конструкции и их способности противостоять этим воздействиям. Такие данные можно получить только в процессе динамических испытаний. В статье описаны методы динамических испытаний транспортных сооружений, позволяющие получить необходимую информацию о работоспособности конструкции при условии воздействия на нее динамических нагрузок.