УДК 621.01

Ф. А. Доронин

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ВИНТОВ В СТАТИКЕ И ДИНАМИКЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ МЕХАНИЗМОВ ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ

Дата поступления: 12.05.2015
Решение о публикации: 09.07.2015

Цель: Продемонстрировать возможности применения винтового исчисления при статических и динамических расчетах пространственных механизмов, содержащих замкнутые кинематические цепи и часто называемых. Отмечена значительная роль отечественных ученых в создании, развитии и применении винтового исчисления в различных задачах теории машин и механизмов. **Методы:** Решение некоторых задач механики механизмов параллельной структуры основано на использовании принципа возможных скоростей и свойств силовых и кинематических винтов, характеризующих нагруженное состояние механизма. Применение математической среды Mathcad позволяет значительно облегчить численные расчеты. **Результаты:** Продемонстрированы способы определения положения мгновенной оси вращения выходного звена (платформы) механизмов параллельной структуры. Показан простой способ построения матрицы жесткости системы, позволяющей определить не только матрицу инерции, но и основные характеристики малых свободных колебаний платформы механизмов параллельной структуры (собственные частоты и формы колебаний) с учетом упругости опорных звеньев. **Практическая значимость:** Продемонстрированы способы определения положения мгновенной оси вращения выходного звена механизма при наличии различных комбинаций связей, наложенных на систему. Предложенная методика позволяет существенно уменьшить трудоемкость расчетов, связанных с определением основных параметров, характеризующих свободные колебания механизмов параллельной структуры.

Винтовое исчисление, силовой винт, кинематический винт, механизм параллельной структуры, мгновенная винтовая ось, относительный момент, плюккеровы координаты.

Feliks A. Doronin, Cand. Sci. (Eng.), associate professor, doroninfa@hotbox.ru (Petersburg State Transport University) APPLICATION OF THE THEORY OF SCREWS IN THE STATICS AND DYNAMICS OF SPATIAL MECHANISMS OF PARALLEL STRUCTURE

Objective: To demonstrate possibilities of using screw calculus in static and dynamic calculations for spatial mechanisms that contain closed kinematic chains and are frequently designated. The significant role of Russia's researchers in creating, development and application of screw calculus to different tasks of theory of machines and mechanisms is noted. **Methods:** Solution of some tasks of mechanics of parallel structure mechanisms is based on deployment of the principle of virtual velocities and qualities of screws of forces and kinematic screws that characterise a mechanism's loaded condition. Using Mathcad mathematical environment allows for significant easing of numerical calculations. **Results:** Methods for determination of position of instantaneous axis of rotation of output component (platform) of parallel structure mechanisms are shown. A simple method for construction of matrix of system rigidity which allows to establish not only inertia matrix but also primary characteristics of small-size autonomous oscillations of parallel structure mechanisms' structure (proper frequencies and oscillation modes) that takes into account elasticity of support links. **Practical importance:** The study demonstrated methods of determination of position of instantaneous axis of rotation of a mechanism's output component when different combinations of connections applied to the system are provided. The method proposed allows for significant decrease in complexity of calculations related to determining primary parameters that characterise autonomous oscillations of parallel structure mechanisms.

Screw calculus, screws of forces, kinematic screw, mechanisms of parallel structure, instantaneous screw axis, relative moments, Pluckers coordinates.

Ирландский астроном сэр Роберт Стоелл Болл (1840–1913 гг.) в 1867 г. стал профессором прикладной математики в Королевском Колледже науки в Дублине. Там он читал лекции и писал работы по механике, в которых излагал теорию винтов. За трактат «Теория винтов» [7] Болл в 1879 г. был награжден Королевской ирландской Академией медалью Каннингема, вручаемой раз в три года за выдающиеся результаты в науке. В этом трактате он, опираясь на работы предшественников (в том числе французского математика и механика Луи Пуансо (1777–1859 гг.), французского геометра Мишеля Шаля (1793–1880 гг.), немецких математиков Августа Фердинанда Мёбиуса (1790–1868 гг.), Юлиуса Плюккера (1801–1868 гг.) и Феликса Клейна (1849–1925 гг.)), ввел в механику твердого тела понятие о силовом винте и описал основные операции с силовыми винтами.

Экстраординарный профессор кафедры механики физико-математического факультета Новороссийского университета (с 1905 г. – демократически избранный ректор этого университета) Иван Михайлович Занчевский (1861–1928 гг.) опубликовал работу [4], в которой изложил теорию векторов, линейных комплексов, винтов и их групп, а также приложения теории винтов к механике.

В 1895 г. появился замечательный труд русского математика и механика Александра Петровича Котельникова (1865–1944 гг.) [6], в котором было последовательно изложено винтовое исчисление и впервые сформулирован «принцип перенесения» для векторной алгебры. Принцип перенесения позволяет изучать геометрию одного пространства, используя геометрию другого, более изученного (например, в кинематике этот принцип позволяет установить соответствие между сферическим и свободным движениями твердого тела). Котельникову удалось истолковать все формулы теории кватернионов как «неразвернутые» формулы теории бикватернионов, т. е. установить полную аналогию тех и других формул.

Профессор Боннского университета Эдуард Штуди (1862–1930 гг.) в работе [13] указывал на связь параболического бикватерниона с группой движений эвклидова пространства, а в 1901 г. в фундаментальном труде [12] сформулировал принцип перенесения, постулирующий аналогию между векторными и винтовыми операциями.

Идеи теории винтов были развиты учеником Штуди немецким математиком и механиком Ричардом Эдлером фон Мизесом (1883–1953 гг.). В 1924 г. вышли в свет его работы [9, 10], в которых изложено несколько иное направление теории винтов – моторное исчисление. Достоинством моторного исчисления является то, что оно приспособлено к решению задач динамики, правда, за счет утраты полной аналогии с векторным исчислением, которая характерна для винтового исчисления. Принцип перенесения в этом случае не работает. Мизес рассмотрел ряд приложений, в том числе в механике стержневых систем.

На основе созданного в 1895 г. А.П. Котельниковым винтового исчисления советский математик Д. Н. Зейлигер развил теорию линейчатых поверхностей и конгруэнций [5].

Винтовое исчисление в теории механизмов применил Ф. М. Диментберг. В трудах [1, 2] помимо подробного обзора литературы обстоятельно изложены основы теории винтов и моторного исчисления и приведено множество приложений этих теорий к решению различных задач анализа и синтеза пространственных механизмов.

В 1956 г. появилась статья В. Е. Гью (В. Е. Гауфа) [8], а в 1965 г. – статья Д. Стюарта [11], в которых были описаны принципиально похожие устройства, представляющие собой неподвижное основание, к которому шестью стержневыми опорами прикреплена подвижная платформа. При изменении длины опорных стержней платформа изменяет свое положение в пространстве. Впоследствии эти устройства в научной литературе стали называться платформами Гауфа – Стюарта (гексаподами), а также механизмами параллельной структуры (параллельными механизмами). Механизмы параллельной структуры благодаря своим свойствам (относительно малому весу, повышенной грузоподъемности, жесткости и высокой точности) применяются в различных областях современного машиностроения. Одним из важных преимуществ механизмов параллельной структуры является то, что они в отличие от традиционных манипуляторов содержат замкнутые кинематические цепи, поэтому воспринимают нагрузку подобно пространственным фермам.

Впоследствии появилось значительное число работ, в которых было показано, что во многих случаях винтовое исчисление оказывается весьма эффективным при исследовании статики, кинематики и динамики механизмов параллельной структуры.

Применение теории групп винтов к определению усилий в абсолютно твердых опорных стержнях платформы

Однородная прямоугольная горизонтальная платформа весом G = 2500 Н, находящаяся в покое под действием заданных сил P = 1000 Н и Q = 600 Н, прикреплена к неподвижному основанию шестью стержневыми опорами 1–6 (рис. 1). Поставим задачу определить усилия S_1–S_6 в опорных стержнях 1–6 платформы, если известны размеры a = 2 м, b = 3 м, c = 4 м.

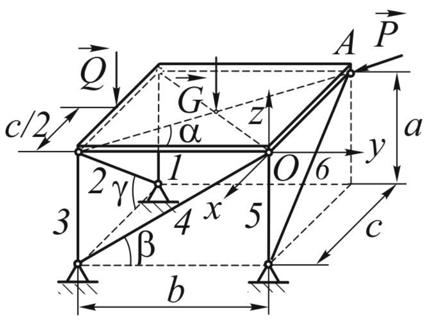

Рис. 1. Схема платформы

Применим принцип возможных скоростей. Согласно принципу освобождаемости от связей, мысленно удалим опорный стержень 1 (рис. 2). Платформа получит одну степень свободы, совершая в общем случае

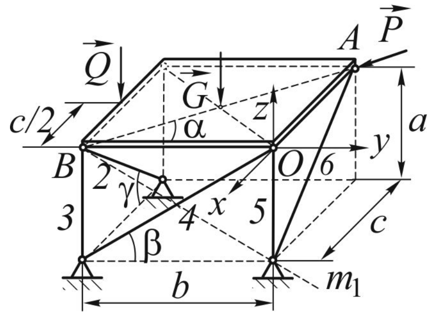

Рис. 2. Схема платформы с удаленным стержнем

винтовое движение, описываемое пока неизвестным кинематическим винтом V_1. Сохранившиеся стержневые опоры накладывают на винт V_1 следующее условие: скорости шарниров O, A и B должны лежать в плоскостях, перпендикулярных осям опорных стержней. Это означает, что единичные винты нулевого параметра e_2–e_6, оси которых совпадают с осями оставшихся стержней 2–6, после приведения к центру O являются взаимными с винтом V_1 и образуют линейный комплекс, определяемый этим винтом.

Будем считать, что все опорные стержни растянуты и единичные векторы e_2–e_6 направлены от шарниров O, A и B, соответственно. Запишем плюккеровы координаты единичных винтов e_2–e_6, приведенных к началу O выбранной системы координат $Oxyz$ (см. рис. 2):

$$\mathbf{e}_2 =$$
$$=(-\cos\gamma \quad 0 \quad -\sin\gamma \quad b\sin\gamma \quad 0 \quad -b\cos\gamma);$$

$$\mathbf{e}_3=(0 \quad 0 \quad -1 \quad b \quad 0 \quad 0);$$

$$\mathbf{e}_4=(0 \quad -\cos\beta \quad -\sin\beta \quad 0 \quad 0 \quad 0);$$

$$\mathbf{e}_5=(0 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 0);$$

$$\mathbf{e}_6=(\cos\gamma \quad 0 \quad -\sin\gamma \quad 0 \quad -c\sin\gamma \quad 0).$$

Перемещения шарниров O, A и B происходят в полярных плоскостях этих стержней. Иными словами, относительные моменты винтов, соответствующих стержням 2–6, с винтом V_1 равны нулю.

Это позволяет составить шесть уравнений с шестью неизвестными, которыми являются плюккеровы координаты единичного винта V_1 (x, y, z, Mx, My, Mz). Пять из этих уравнений представляют собой равенства нулю относительных моментов $V_1{*}e_2 = 0$; $V_1{*}e_3 = 0$; $V_1{*}e_4 = 0$; $V_1{*}e_5 = 0$; $V_1{*}e_6 = 0$, а шестое уравнение нормирует модуль единичного винта V_1: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. В рассматриваемом примере эти уравнения принимают вид:

$$V_1 * e_2 = x \cdot b\sin\gamma + y \cdot 0 + z \cdot (-b\cos\gamma) + \\ + Mx \cdot (-\cos\gamma) + My \cdot 0 + Mz \cdot (-\sin\gamma) = 0;$$

$$V_1 * e_3 = x \cdot b + y \cdot 0 + z \cdot 0 + \\ + Mx \cdot 0 + My \cdot 0 + Mz \cdot (-1) = 0;$$

$$V_1 * e_4 = x \cdot 0 + y \cdot 0 + z \cdot 0 + Mx \cdot 0 + \\ + My \cdot (-\cos\beta) + Mz \cdot (-\sin\beta) = 0;$$

$$V_1 * e_5 = x \cdot 0 + y \cdot 0 + z \cdot 0 + \\ + Mx \cdot 0 + My \cdot 0 + Mz \cdot (-1) = 0;$$

$$V_1 * e_6 = x \cdot 0 + y \cdot (-c\sin\gamma) + \\ + z \cdot 0 + Mx \cdot \cos\gamma + My \cdot 0 + \\ + Mz \cdot (-\sin\gamma) = 0;$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

В данных уравнениях значком «*» обозначена операция вычисления относительного момента двух винтов.

Решая полученную систему уравнений, находим плюккеровы координаты искомого кинематического винта:

$$\mathbf{V}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\cos\beta & \sin\beta & -a\cos\beta & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для определения усилия S_1 по принципу возможных скоростей составим выражение для суммы возможных мощностей сил, действующих на систему, на кинематическом винте V_1, т. е. найдем относительный момент силового винта заданных сил P вместе с неизвестным усилием S_1:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} P\sin\alpha & -P\cos\alpha \\ -Q - G - S_1 & G\dfrac{b}{2} + Qb + S_1 b \\ -G\dfrac{c}{2} - Q\dfrac{c}{2} - S_1 c & P\cos\alpha\, c \end{pmatrix}$$

и кинематического винта V_1:

$$-a\cos\beta \cdot P\sin\alpha + \cos\beta \times \\ \times \left(G\frac{c}{2} + Q\frac{c}{2} + S_1 c \right) + \sin\beta \times \\ \times P\cos\alpha \cdot c = 0; \\ \Rightarrow\ S_1 = -1550 \text{ Н}.$$

Заметим, что ось кинематического винта V_1 направлена вдоль пунктирной прямой m_1 (рис. 2), которая совпадает с осью Риттера для стержня 1 (сумма моментов всех усилий S_2–S_6 относительно этой оси тождественно равна нулю). Нужно отметить, что в данном случае положение прямой m_1 даже без расчетов легко определяется из геометрических соображений.

Пользуясь аналогичным алгоритмом, находим плюккеровы координаты кинематических винтов V_2 и V_3, характеризующих возможные движения платформы при удалении опорных стержней 2 и 3:

$$\mathbf{V}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad (1)$$

$$\mathbf{V}_3 = \begin{pmatrix} -\sin\alpha & -\cos\alpha & 0 \\ -a\cos\alpha & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Положение мгновенной винтовой оси m_2 платформы в момент удаления стержня 2, определяемое координатами (1), представлено на рис. 3. Как и в первом случае, его легко можно определить геометрическим способом. Для этого необходимо найти прямую линию, которая параллельна стержням 1, 3 и 5 и одновременно пересекает стержни 4 и 6.

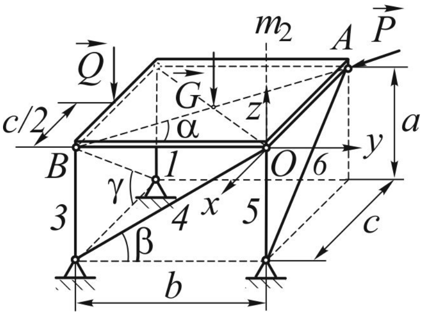

Рис. 3. Положение мгновенной винтовой оси m_1

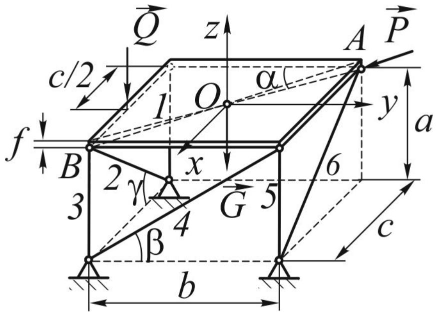

Рис. 5. Схема платформы, опирающейся на упругие стержни

Плюккеровы координаты (2) определяют мотор мгновенной оси вращения платформы в момент удаления стержня 3 (расстояние между мгновенной осью вращения и мгновенной винтовой осью m_3 определяется по формуле $d = ab^2/(b^2 + c^2)$ [3]). При этом возможность найти геометрическим способом положение мгновенной винтовой оси m_3 платформы (рис. 4) представляется не столь очевидной, как в двух предыдущих случаях.

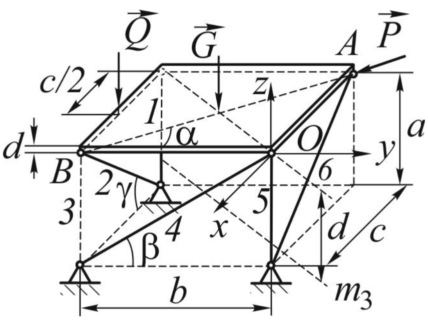

Рис. 4. Положение мгновенной винтовой оси m_2

Пользуясь изложенным алгоритмом, последовательно находим усилия во всех оставшихся опорных стержнях: S_2 = 894,43 Н; S_3 = = –700 Н; S_4 = –721,11 Н; S_5 = –850 Н; S_6 = 0 Н.

Применение винтового исчисления к определению частот малых свободных колебаний платформы

Рассмотрим случай, когда однородная прямоугольная платформа (рис. 5), рассмотренная в предыдущем примере, опирается на упругие в продольном направлении стержни S_1–S_6 с коэффициентами жесткости $c_1 = 10^5$ Н/м, $c_2 = 2 \cdot 10^4$ Н/м, $c_3 = 3 \cdot 10^4$ Н/м, $c_4 = 4 \cdot 10^4$ Н/м, $c_5 = 5 \cdot 10^4$ Н/м и $c_6 = 6 \cdot 10^4$ Н/м, соответственно. На рис. 5 система изображена в положении покоя. В первом приближении пренебрежем сопротивлением движению звеньев механизма.

Выберем систему координат $Oxyz$, начало которой совместим с центром масс O платформы, а оси x, y и z – с ее главными центральными осями инерции. За обобщенные координаты системы примем смещения x, y и z центра масс платформы и углы φ_x, φ_y и φ_z ее поворотов вокруг осей x, y и z, соответственно.

Пренебрежем кинетической энергией стержневых опор 1–6, сообщим системе обобщенные скорости $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, $\dot{\varphi}_x$, $\dot{\varphi}_y$ и $\dot{\varphi}_z$ и запишем выражение кинетической энергии системы:

$$T = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{A} \dot{\mathbf{q}},$$

где $\dot{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\varphi}_x \\ \dot{\varphi}_y \\ \dot{\varphi}_z \end{pmatrix}$ – вектор-столбец обобщенных скоростей;

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_z \end{pmatrix}$$ – матрица инерции; m – масса платформы;

$J_x=\dfrac{m(f^2+b^2)}{12}$, $J_y=\dfrac{m(f^2+c^2)}{12}$,

$J_z=\dfrac{m(c^2+b^2)}{12}$ – моменты инерции платформы относительно ее главных центральных осей инерции.

Потенциальную энергию системы можно представить в матричной форме:

$$\Pi=\frac{1}{2}\mathbf{q}^T\mathbf{C}\mathbf{q},$$

где $\mathbf{C}$ – матрица инерции системы.

Запишем плюккеровы координаты единичных винтов e_1–e_6, приведенных к началу O выбранной системы координат $Oxyz$ (рис. 5):

$$\mathbf{e}_1=(0 \quad 0 \quad -1 \quad 0{,}5b \quad -0{,}5c \quad 0);$$

$$\mathbf{e}_2=\begin{pmatrix} -\cos\gamma & 0 \\ 0{,}5b\sin\gamma & -\sin\gamma \\ 0{,}5c\sin\gamma+0{,}5f\cos\gamma & -0{,}5b\cos\gamma \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{e}_3=(0 \quad 0 \quad -1 \quad 0{,}5b \quad 0{,}5c \quad 0);$$

$$\mathbf{e}_4=\begin{pmatrix} 0 & -\cos\beta \\ -\sin\beta & -0{,}5b\sin\beta-0{,}5f\cos\beta \\ 0{,}5c\sin\beta & -0{,}5c\cos\beta \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{e}_5=(0 \quad 0 \quad -1 \quad -0{,}5b \quad 0{,}5c \quad 0);$$

$$\mathbf{e}_6=\begin{pmatrix} \cos\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & -0{,}5b\sin\gamma \\ -0{,}5c\sin\gamma-0{,}5f\cos\gamma & -0{,}5b\cos\gamma \end{pmatrix}.$$

Из этих строк сформируем вспомогательную матрицу Pluck:

$$\mathbf{Pluck}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -\cos\gamma & 0 & -\sin\gamma \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -\cos\beta & -\sin\beta \\ 0 & 0 & -1 \\ \cos\gamma & 0 & -\sin\gamma \\ \multicolumn{3}{c}{0{,}5b} \\ \multicolumn{3}{c}{0{,}5b\sin\gamma} \\ \multicolumn{3}{c}{0{,}5b} \\ \multicolumn{3}{c}{-0{,}5b\sin\beta-0{,}5f\cos\beta} \\ \multicolumn{3}{c}{-0{,}5b} \\ \multicolumn{3}{c}{-0{,}5b\sin\gamma} \\ \multicolumn{3}{c}{-0{,}5c} \\ \multicolumn{3}{c}{0{,}5c\sin\gamma+0{,}5f\cos\gamma} \\ \multicolumn{3}{c}{0{,}5c} \\ \multicolumn{3}{c}{0{,}5c\sin\beta} \\ \multicolumn{3}{c}{0{,}5c} \\ \multicolumn{3}{c}{-0{,}5c\sin\gamma-0{,}5f\cos\gamma} \\ \multicolumn{3}{c}{0} \\ \multicolumn{3}{c}{-0{,}5b\cos\gamma} \\ \multicolumn{3}{c}{0} \\ \multicolumn{3}{c}{-0{,}5c\cos\beta} \\ \multicolumn{3}{c}{0} \\ \multicolumn{3}{c}{-0{,}5b\cos\gamma} \end{pmatrix}.$$

Введем в рассмотрение диагональную матрицу $\mathbf{C}_1$ коэффициентов жесткости упругих стержней

$$\mathbf{C}_1=\begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_6 \end{pmatrix}.$$

Искомая матрица жесткости системы определяется формулой

$$\mathbf{C} = \left(\mathbf{C}_1 \mathbf{Pluck}\right)^T \mathbf{Pluck}\,.$$

Подстановка выражений для T и П в уравнения Лагранжа II рода приводит к известному дифференциальному уравнению свободных колебаний системы с n степенями свободы в матричной форме:

$$\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{q} = \mathbf{0}\,.$$

Для численного решения задачи воспользуемся стандартным пакетом математических программ Mathcad. Вычисления проведем при следующих исходных данных: m = 254,84 кг, J_x = 191,34 кг·м^2, J_y = 340 кг·м^2, J_z = 530,92 кг·м^2, a = 2 м, b = 3 м, c = 4 м, f = 0,1 м.

Собственные частоты системы можно найти с привлечением стандартной процедуры определения собственных чисел матрицы $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}$:

$$\mathbf{k} = \sqrt{eigenvals(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C})}\,.$$

Получаем следующие значения частот свободных колебаний платформы:

$$\mathbf{k}^T = (6{,}54;\ 11{,}35;\ 16{,}49;\ 31{,}06;\ 35{,}84;\ 62{,}44)\ \text{с}^{-1}.$$

Матрица собственных форм колебаний системы может быть записана в виде:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 75{,}734 & 0{,}001 & -0{,}856 \\ -174{,}373 & 0{,}898 & -3{,}986 \\ 1297{,}895 & -2{,}497 & -0{,}479 \\ -944{,}475 & -2{,}084 & -0{,}091 \\ 73{,}128 & -0{,}370 & -1{,}853 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3{,}222 & 0{,}296 & 2{,}095 \\ 0{,}065 & 0{,}207 & -3{,}255 \\ 0{,}157 & 0{,}318 & -1{,}800 \\ 0{,}026 & 0{,}228 & -0{,}401 \\ 0{,}891 & -0{,}057 & 3{,}336 \end{pmatrix}.$$

Заключение

Приведенные в статье примеры применения винтового исчисления к решению задач статики и динамики пространственного механизма параллельной структуры (МПС) иллюстрируют некоторые особенности использования элементов теории винтов при решении подобных задач, а также показывают, что подобная методика позволяет существенно уменьшить трудоемкость расчетов, связанных с определением основных параметров, характеризующих свободные колебания МПС.

Библиографический список

1. Диментберг Ф. М. Теория винтов и ее приложения / Ф. М. Диментберг. – М. : Наука, 1978. – 327 с.

2. Диментберг Ф. М. Теория пространственных шарнирных механизмов / Ф. М. Диментберг. – М. : Наука, 1982. – 336 с.

3. Доронин Ф. А. К вопросу об определении положения мгновенной оси вращения / Ф. А. Доронин // Бюл. результатов научных исследований. – 2013. – Вып. 3 (8). – С. 23–35.

4. Занчевский И. М. Теория винтов и приложения ее к механике / И. М. Занчевский. – Одесса, 1889. – 157 с.

5. Зейлигер Д. Н. Комплексная линейчатая геометрия / Д. Н. Зейлигер. – М. : Гостехиздат, 1934. – 196 с.

6. Котельников А. П. Винтовое счисление и некоторые приложения его к геометрии и механике / А. П. Котельников. – Казань, 1895. – 216 с.

7. Ball R. S. The Theory of Screws : A study in the dynamics of a rigid body / R. S. Ball. – Ireland, Dublin : Hodges, Foster and Co., 1876. – 194 p.

8. Gough V. E. Contribution to discussion of papers on research in Automobile Stability, Control and Tyre performance / V. E. Gough. – Proc. Auto Div. Inst. Mech. Eng., 1956–1957. – P. 392–394.

9. Mises R. Anwendungen der Motorrechnung / R. Mises // Zeitschr. fur angew. Math. und Mech. – 1924. – B. 4, H. 3. – S. 193–213.

10. Mises R. Motorrechnung, ein neues Hilfmittel der Mechanik / R. Mises // Zeitschr. fur angew. Math. und Mech. – 1942. – B. 4, H. 2. – S. 155–181.

11. Stewart D. A Platform with Six Degrees of Freedom / D. Stewart. – Proc. Inst. Mech. Eng., 1965. – P. 1–15.

12. Study E. Von Bewegungen und Umlegungen / E. Study. – M. A. XXXIX Band., 1891.

13. Study E. Geometrie der Dynamen / E. Study. – Lpz., 1901.

References

1. Dimentberg F. M. Teoriya vintov i yeye prilozheniya [Screw Theory and Its Applications]. Moscow, Nauka, 1978. 327 p.

2. Dimentberg F. M. Teoriya prostranstvennykh sharnirnykh mekhanizmov [Theory of Spatial Jointed Mechanisms]. Moscow, Nauka, 1982. 336 p.

3. Doronin F. A. *Byulleten rezultatov nauchnykh issledovaniy – Bull. Res. Results,* 2013, no. 3 (8), pp. 23-35.

4. Zanchevskiy I. M. Teoriya vintov i prilozheniya yeye k mekhanike [Screw Theory and Its Applications in Mechanics]. Odessa, 1889. 157 p.

5. Zeylinger D. N. Kompleksnaya lineychataya geometriya [Complex Ruled Geometry]. Moscow, Gostekhizdat, 1934. 196 p.

6. Kotelnikov A. P. Vintovoye schisleniye i nekotoryye prilozheniya yego k geometrii i mekhanike [Screw Calculus and Some of Its Applications in Geometry and Mechanics]. Kazan, 1895. 216 p.

7. Ball R. S. The Theory of Screws: A study in the dynamics of a rigid body. Ireland, Dublin, Hodges, Foster and Co., 1876. 194 p.

8. Gough V. E. Contribution to discussion of papers on research in Automobile Stability, Control and Tyre performance. *Proc. Auto Div. Inst. Mech. Eng.*, 1956–1957, pp. 392-394.

9. Mises R. Anwendungen der Motorrechnung. *Zeitschr. fur angew. Math. und Mech.*, 1924, B. 4, H. 3, ss. 193-213.

10. Mises R. Motorrechnung, ein neues Hilfmittel der Mechanik. *Zeitschr. fur angew. Math. und Mech.*, 1942, B. 4, H. 2, ss. 155-181.

11. Stewart D. A Platform with Six Degrees of Freedom. *Proc. Inst. Mech. Eng.*, 1965, pp. 1-15.

12. Study E. Von Bewegungen und Umlegungen. M. A. XXXIX Band., 1891.

13. Study E. Geometrie der Dynamen. Lpz., 1901.

ДОРОНИН Феликс Александрович – канд. техн. наук, доцент, doroninfa@hotbox.ru (Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I).