

УДК 625.4.015

Ю. С. Ромен

ОАО «Научно-исследовательский институт железнодорожного транспорта»

А. Н. Савоськин, А. А. Акишин

Московский государственный университет путей сообщения

**АНАЛИЗ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ
НЕРОВНОСТЕЙ РЕЛЬСОВЫХ НИТЕЙ**

На движение рельсовых экипажей оказывает сильное влияние внешнее возмущение. Таким возмущением являются геометрические неровности рельсовых нитей. В предыдущих работах не было уделено достаточного внимания корреляционной взаимосвязи между горизонтальными и вертикальными возмущениями рельсовых нитей. В данной работе показана эта взаимосвязь, а также уточнены характеристики возмущений.

В качестве возмущений рассмотрен четырехмерный случайный процесс вертикальных и горизонтальных геометрических неровностей рельсовых нитей. Был проведен корреляционно-спектральный анализ этого возмущения с последующей аппроксимацией графиков корреляционных функций и спектральных плотностей аналитическими выражениями.

Используя полученные аналитические выражения, можно будет в дальнейшем решать задачи генерации геометрических неровностей во временной области для исследования колебаний рельсовых экипажей с нелинейными характеристиками рессорного подвешивания.

геометрические неровности рельсов; корреляционный и спектральный анализ.

Введение

Для исследования колебаний рельсовых экипажей и решения задач по выбору схемы и параметров их рессорного подвешивания необходимо учитывать внешние возмущения. Такими возмущениями, вызывающими колебания рельсовых экипажей, являются геометрические неровности рельсовых нитей. Изучению характеристик этих неровностей посвящен ряд работ [1]–[4]. В работе [3] приведены характеристики четырехмерного случайного процесса возмущений в виде реализаций вертикальных $\eta_{л,п}^z$ и горизонтальных $\eta_{л,п}^y$ неровностей левого и правого рельсов. Однако эти реализации имели малую длительность и были получены с большим шагом дискретизации. В результате этого в составе корреляционных функций и спектральных плотностей исследуемых случайных процессов было выявлено только по одному максимуму.

В настоящей работе приведены результаты обработки реализаций случайных процессов вертикальных и горизонтальных неровностей левой и правой рельсовых нитей, полученных на Октябрьской и Куйбышевской железных дорогах интегрированием ускорений масс, контактирующих с рельсовыми нитями [4]. Замеры выполнялись на участках пути длиной 1 км с шагом дискретизации $\Delta x = 0,185$ м, что соответствует шагу по времени $\Delta t = 0,185$ с при скорости движения 1 м/с. При таком шаге дискретизации было получено $N = 5400$ замеров.

1 Корреляционный анализ

Такой объем выборок N исследуемых случайных процессов $\eta_{л,п}^{z,y}(x = vt)$ (рис. 1) позволил выполнить вычисление корреляционных функций $R_{л,п}^{z,y}(\tau)$ и функций спектральных плотностей $G_{л,п}^{z,y}(f) = 2\Phi_{л,п}^{z,y}(f)$ непосред-

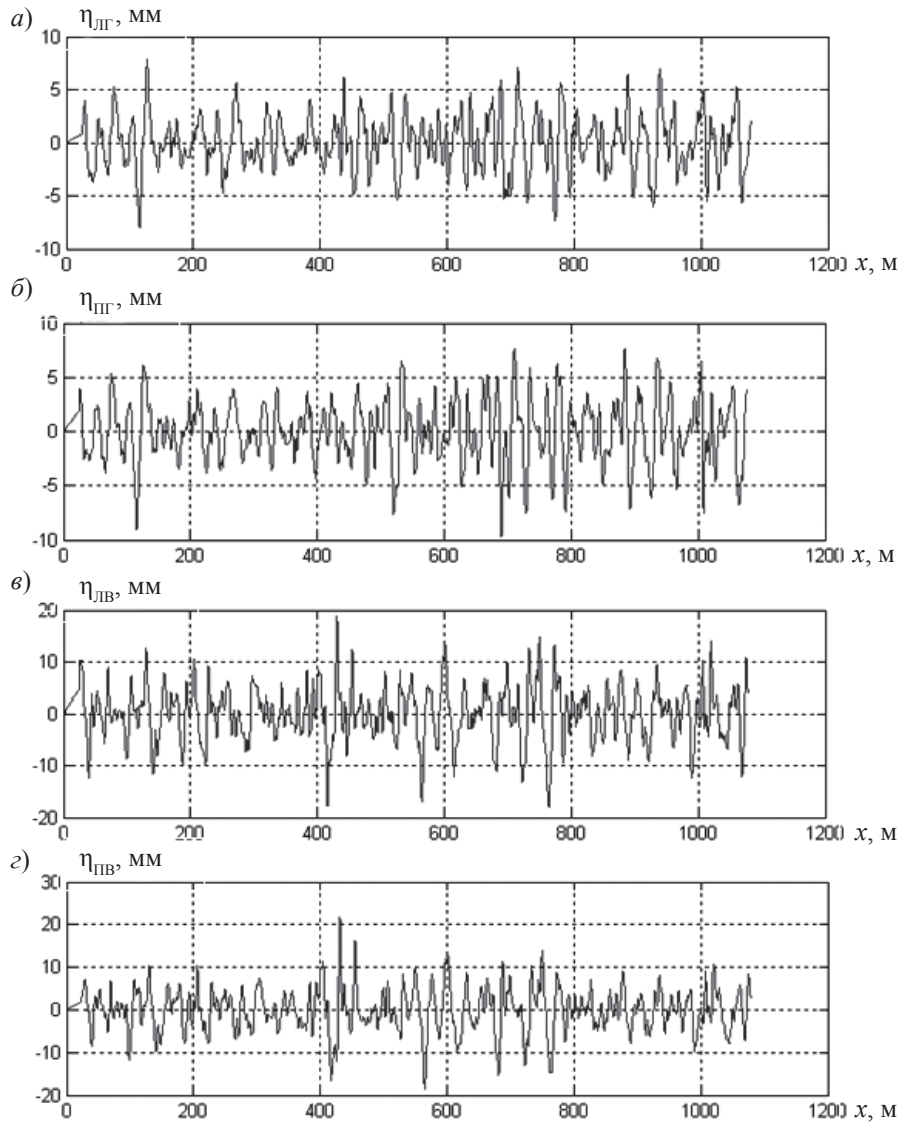


Рис. 1. Реализации случайных процессов неровностей рельсов: горизонтальная левого (а) и правого (б) рельсов; вертикальная левого (в) и правого (г) рельсов

ственно по реализациям с использованием следующих формул:

$$R_{\eta_{iu}}(\tau = l\Delta t) = \frac{1}{(N_3 - s)\Delta t} \times \sum_{l_{ш}\Delta t=0}^{(N_3-l)\Delta t} \eta_{iu}(i_{ш}\Delta t)\eta_{iu}[(i_{ш} + l)\Delta t]; \quad (1)$$

$$G_{\eta_{iu}}(r2\pi\Delta f) = \frac{2}{t_p} \left| x_i(r2\pi\Delta f; t_p) \cdot x_u(r2\pi\Delta f; t_p) \right|; \quad (2)$$

$$x_i(r2\pi\Delta f; t_p) = \Delta t \sum_{i=0}^{N-1} \eta_i(i_{ш}\Delta t) \exp(-j2\pi\Delta f r \Delta t); \quad (3)$$

$$x_u(r2\pi\Delta f; t_p) = \Delta t \sum_{i=0}^{N-1} \eta_u(i_{ш}\Delta t) \exp(-j2\pi\Delta f r \Delta t), \quad (4)$$

где $G_{\eta_{i,u}}(\omega = r2\pi\Delta f)$ – «односторонняя» спектральная плотность, определенная в диапазоне частот $0 < f < \infty$, а $\Phi_{\eta_{i,u}}(\omega)$ – «двух-

сторонняя» спектральная плотность, определенная в диапазоне частот $-\infty < \omega < \infty$.

В этих выражениях обозначены: $i_{ш}$ – номер шага временной дискретизации случайного процесса; l – сдвиг между вычисляемыми значениями корреляционной функции ($l = 0, 1, 2, \dots, s$); s – максимальное значение сдвига ($s = 0,1 \div 0,25 N_p$); Δt – шаг временной дискретизации случайных процессов; r – номер шага по частоте ($r = 0, 1, 2, \dots, m_f = f_{вч} / \Delta f$); Δf – шаг по частоте (в пакете Матлаб выбирается автоматически по алгоритму быстрого преобразования Фурье в зависимости от величины N_p).

Чтобы избавиться от ошибок взаимного влияния отдельных значений $G(r\Delta f)$ и получить эффективную оценку истинной спектральной плотности, выполняют сглаживание ее вычисленных значений. В настоящей работе с этой целью был использован алгоритм Хана:

$$G(r\Delta f) =$$

$$= \begin{cases} 0,5 \{ G(r\Delta f) + G[(r+1)\Delta f] \}, & \text{при } r = 0 \\ 0,25G[(r-1)\Delta f] + 0,5G(r\Delta f) + \\ 0,25G[(r+1)\Delta f], & \text{при } r=1,2, \dots, m_f - 1 \\ 0,5 \{ G[(m_f - 1)\Delta f] + G(m_f\Delta f) \}, & \text{при } r=m_f \end{cases}$$

При $i = u$ – вычисляются автокорреляционные функции $R_{\eta^i}(\tau)$ или $R_{\eta^u}(\tau)$ и спектральные плотности $G_{\eta^i}(f)$ или $G_{\eta^u}(f)$, а при $i \neq u$ – взаимные корреляционные функции $R_{\eta^{iu}}(\tau)$ и взаимные спектральные плотности $\Phi_{\eta^{iu}}(j\omega) = 0,5G_{\eta^{iu}}(j\omega)$, где $\omega = 2\pi f$.

Результаты вычисления автокорреляционных функций (рис. 2) свидетельствуют о том,

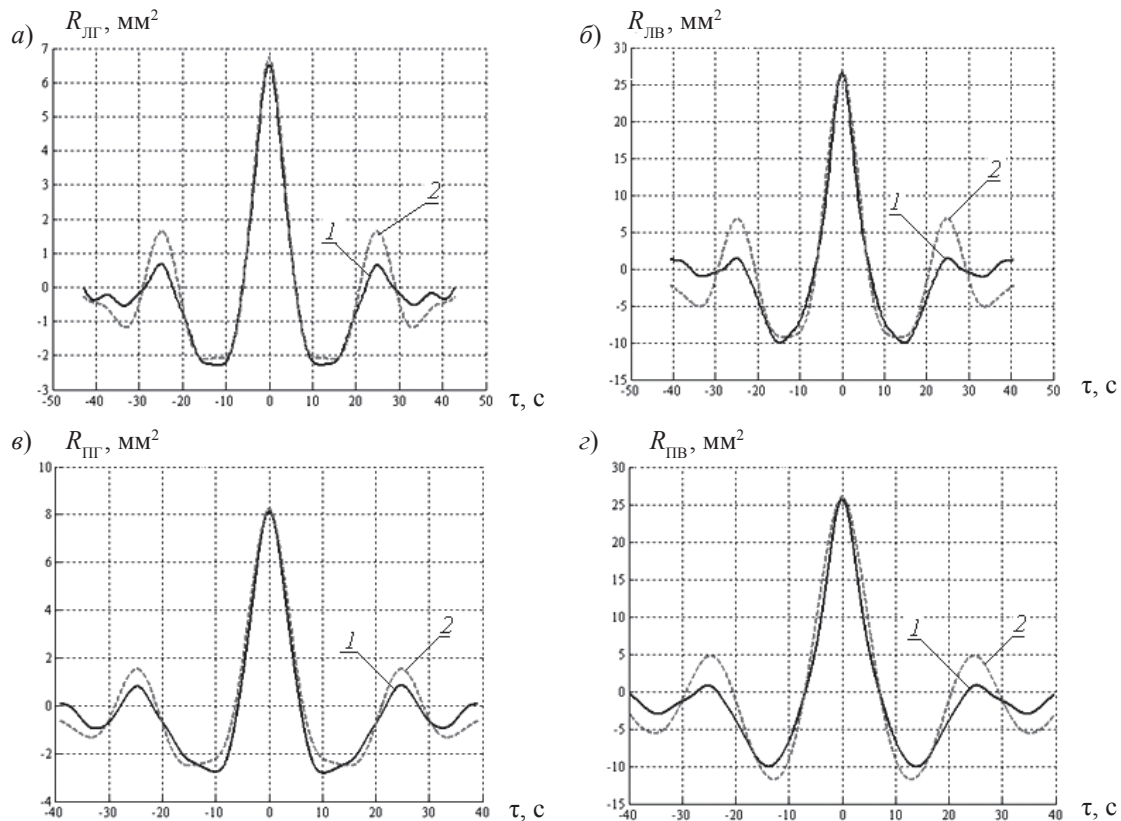


Рис. 2. Автокорреляционные функции неровностей пути: левого рельса горизонтальная (а) и вертикальная (б); правого рельса горизонтальная (в) и вертикальная (з); 1 – экспериментальные; 2 – по аналитическому выражению

что в их состав входит несколько затухающих периодических слагаемых. Из этого рисунка видно, что автокорреляционные функции являются четными, т. е. $R_{\eta}(\tau) = R_{\eta}(-\tau)$. Их максимум, равный дисперсии S_{η}^2 , соответствует началу координат.

Вместе с тем взаимные корреляционные функции (рис. 3) не являются четными $R_{\eta_i, \eta_j}(\tau) = R_{\eta_j, \eta_i}(-\tau)$. Максимум взаимных корреляционных функций, равный дисперсии $S_{\eta_{ii}}^2 = S_{\eta_i} S_{\eta_j}$, сдвинут относительно начала координат на время τ_c . Отметим также, что для взаимных корреляционных функций $R_{\text{лвпв}}(\tau)$ и $R_{\text{лппл}}(\tau)$, связывающих вертикальные и горизонтальные неровности левой и правой рельсовых нитей, $\tau_c = 0$ (рис. 4). Это означает, что соответствующие случайные процессы $\eta_{\text{ли}}$ и $\eta_{\text{пи}}$ слабо коррелированы, т. е. статистически независимы, что характерно для пути хорошего состояния. В этом случае:

$$R_{\text{лппл}}(\tau) = R_{\text{ли}}(\tau)R_{\text{пи}}(\tau). \quad (5)$$

Для решения последующей задачи генерации четырехмерного случайного процесса неровностей необходимо выполнить аналитическую аппроксимацию полученных графиков корреляционных функций и спектральных плотностей.

Для взаимных корреляционных функций будем использовать аналитическое выражение:

$$R_{\eta_{ii}}(\tau) = S_{\eta}^2 \sum_k a_k \exp[-\alpha_k^2 v^2 (\tau^2 - \tau_c^2)] \times \cos[\beta_k v (\tau - \tau_c)], \quad (6)$$

соответствующее дифференцируемому случайному процессу $\eta(x = vt)$.

В этом выражении обозначены:

a_k – доля дисперсии S_{η}^2 , приходящаяся на k -тую составляющую аналитического выражения ($\sum_k a_k = 1$);

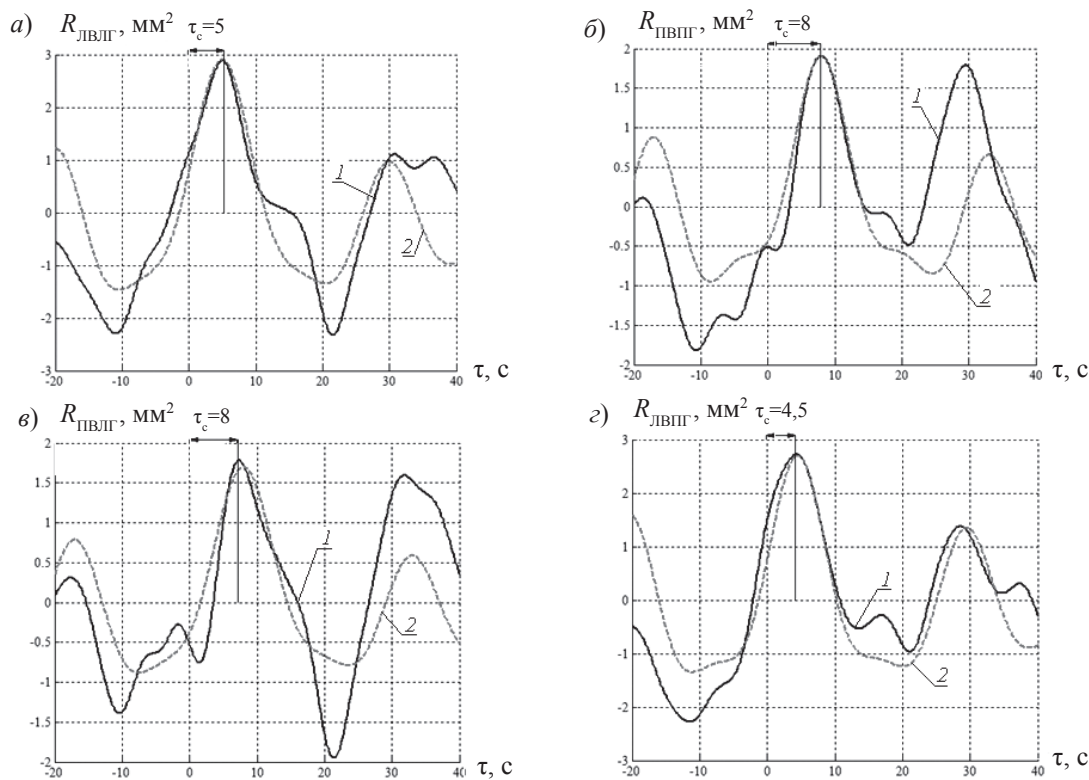


Рис. 3. Взаимные корреляционные функции между неровностями левой и правой рельсовых нитей:

a – левая вертикальная и горизонтальная; *б* – правая вертикальная и горизонтальная; *в* – правая вертикальная и левая горизонтальная; *г* – левая вертикальная и правая горизонтальная; *1* – экспериментальные; *2* – по аналитическому выражению

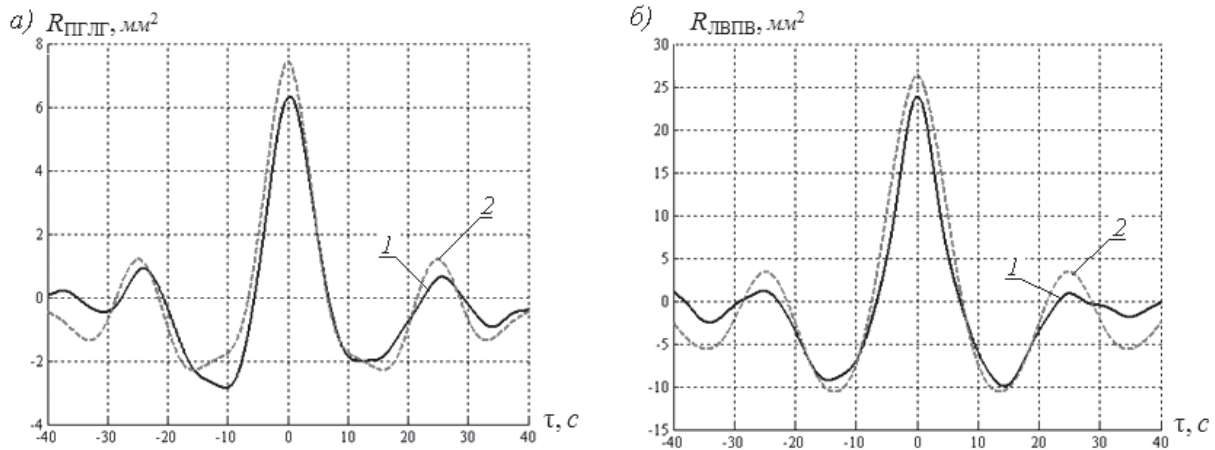


Рис. 4. Взаимные корреляционные функции горизонтальных (а) и вертикальных (б) неровностей правой и левой рельсовых нитей: 1 – экспериментальные; 2 – построенные по выражениям $R_{ПЛЛГ}(\tau) = \sqrt{R_{ПГ}(\tau)R_{ЛГ}(\tau)}$ и $R_{ЛВЛВ}(\tau) = \sqrt{R_{ЛВ}(\tau)R_{ЛВ}(\tau)}$

β_k и $\alpha_k [m^{-1}]$ – нормированные по скорости частота и коэффициент затухания k -той затухающей периодической составляющей;

τ_c – время сдвига максимума взаимной корреляционной функции относительно начала координат.

При β_k равном нулю в составе (6) будет экспоненциальная составляющая. При τ_c равном нулю, как уже говорилось, случайные процессы η_{li} и η_{li} не коррелированы, т. е. статистически независимы. Отметим также, что $\tau_c = 0$ соответствует аналитическому выражению автокорреляционной функции:

$$R_{\eta u}(\tau) = S_{\eta}^2 \sum_k a_k \exp(-\alpha_k^2 v^2 \tau^2) \cos(\beta_k v \tau). \quad (7)$$

2 Спектральный анализ

Поскольку спектральная плотность случайного процесса может быть получена как преобразование Фурье корреляционной функции, аналитическому выражению автокорреляционной функции (7) при $\tau_c = 0$ будет соответствовать следующее выражение спектральной плотности:

$$\Phi_{\eta}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{\eta}(\tau) \cos \omega \tau d\tau =$$

$$= \frac{S_{\eta}^2}{4\pi} \sum_k a_k \left\{ \exp \left[-\frac{(\omega - \beta_k v)^2}{4\alpha_k^2 v^2} \right] + \exp \left[-\frac{(\omega + \beta_k v)^2}{4\alpha_k^2 v^2} \right] \right\}. \quad (8)$$

Для взаимной спектральной плотности, которая является нечетной функцией, аналитическое выражение, соответствующее (6), имеет вид:

$$\begin{aligned} \Phi_{\eta i u}(j\omega) &= \frac{1}{2\pi} \pi \int_{-\infty}^{\infty} R_{\eta i u}(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau = \\ &= \text{Re} \Phi_{\eta i u}(j\omega) + j \text{Im} \Phi_{\eta i u}(j\omega) = \\ &= \Phi_{\eta i u}^A(\omega) \exp[-j\Phi_{\eta i u}^{\Phi}(\omega)], \end{aligned}$$

где $\text{Re} \Phi_{\eta i u}(j\omega)$ – вещественная (синфазная) составляющая взаимной спектральной плотности.

$$\text{Re} \Phi_{\eta i u}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{\eta i u}(\tau) \cos \omega \tau d\tau; \quad (9)$$

$\text{Im} \Phi_{\eta i u}(j\omega)$ – мнимая (квадратурная) составляющая взаимной спектральной плотности:

$$\operatorname{Im} \Phi_{\eta i u}(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{\eta i u}(\tau) \sin \omega \tau d\tau; \quad (10)$$

$\Phi_{\eta i u}^A(\omega)$ – амплитудная составляющая взаимной спектральной плотности:

$$\begin{aligned} \Phi_{\eta i u}^A(\omega) &= \\ &= \sqrt{[\operatorname{Re} \Phi_{\eta i u}(j\omega)]^2 + [\operatorname{Im} \Phi_{\eta i u}(j\omega)]^2}; \end{aligned} \quad (11)$$

$\Phi_{\eta i u}^\varphi(\omega)$ – фазовая составляющая взаимной спектральной плотности:

$$\begin{aligned} \Phi_{\eta i u}^\varphi(\omega) &= \\ &= \operatorname{arctg} [\operatorname{Im} \Phi_{\eta i u}(j\omega) / \operatorname{Re} \Phi_{\eta i u}(j\omega)]. \end{aligned} \quad (12)$$

Графики спектральных и взаимных спектральных плотностей, построенные по реализациям случайных процессов $\eta_{л,п}^{z,y}(x=vt)$ на основе выражений (2)–(4), также свидетельствуют о том, что в их составе имеется несколько слагаемых, обусловленных различными частотами и формами колебаний в системе. Эту особенность взаимных корреляционных функций $R_{\eta i u}(\tau)$ можно объяснить влиянием колебаний боковой качки, а также отбоя и виляния, формирующих силы в системе «экипаж – путь».

При этом вещественные составляющие взаимных спектральных плотностей являются симметричными функциями, а их мнимые составляющие – кососимметричными.

По взаимной корреляционной функции, определяемой аналитическим выражением (6), по формулам (8) и (9) были получены выражения для вещественной и мнимой составляющих взаимной спектральной плотности в виде:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \Phi_{\eta i u}(\omega) &= \frac{S_{\eta}^2}{2\pi} \sum_k a_k \exp(-\alpha_k^2 v^2 \tau_c^2) \times \\ &\times \left\{ \frac{\cos(\beta_k v \tau_c)}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha_k^2 v^2}} \times \right. \\ &\times \left[\exp\left(-\frac{(\omega + \beta_k v)^2}{4\alpha_k^2 v^2}\right) + \exp\left(-\frac{(\omega - \beta_k v)^2}{4\alpha_k^2 v^2}\right) \right] - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &- \frac{(\omega - \beta_k v)}{4\alpha_k v} \sin(\beta_k v \tau_c) \times \\ &\times \left[\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(2p-1)!!} \left(\frac{(\omega + \beta_k v)^{p-1}}{2\alpha_k^2 v^2} \right) + \right. \\ &\left. + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(2p-1)!!} \left(\frac{(\omega - \beta_k v)^{p-1}}{2\alpha_k^2 v^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (13)$$

и

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \Phi_{\eta i u}(\omega) &= \\ &= \frac{S_{\eta}^2}{2\pi} \sum_k a_k \exp(-\alpha_k^2 v^2 \tau_c^2) \times \\ &\times \left\{ \frac{\cos(\beta_k v \tau_c)}{4\alpha_k^2 v^2} \times \right. \\ &\times \left[(\omega + \beta_k v) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(2p-1)!!} \left(\frac{(\omega + \beta_k v)^2}{2\alpha_k^2 v^2} \right)^{p-1} + \right. \\ &\left. + (\omega - \beta_k v) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(2p-1)!!} \left(\frac{(\omega - \beta_k v)^2}{2\alpha_k^2 v^2} \right)^{p-1} \right] + \\ &\left. + \frac{\sin(\beta_k v \tau_c)}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha_k^2 v^2}} \times \right. \\ &\left. \times \left[\exp\left(-\frac{(\omega + \beta_k v)^2}{2\alpha_k^2 v^2}\right) - \exp\left(-\frac{(\omega - \beta_k v)^2}{2\alpha_k^2 v^2}\right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (14)$$

Параметры аналитических выражений корреляционных функций и, соответственно, спектральных плотностей определялись следующим образом. Величины S_{η}^2 и τ_c находились непосредственно по графикам корреляционных функций; значения β_k – по графикам спектральных плотностей. При этом на основе графиков, приведенных на рис. 5–9, было принято четыре слагаемых с частотами $\beta_1 = 0$; $\beta_2 = 0,125 \text{ м}^{-1}$; $\beta_3 = 0,250 \text{ м}^{-1}$ и $\beta_4 = 0,500 \text{ м}^{-1}$. Значения же величин a_k и α_k определялись методом оптимизации. При этом

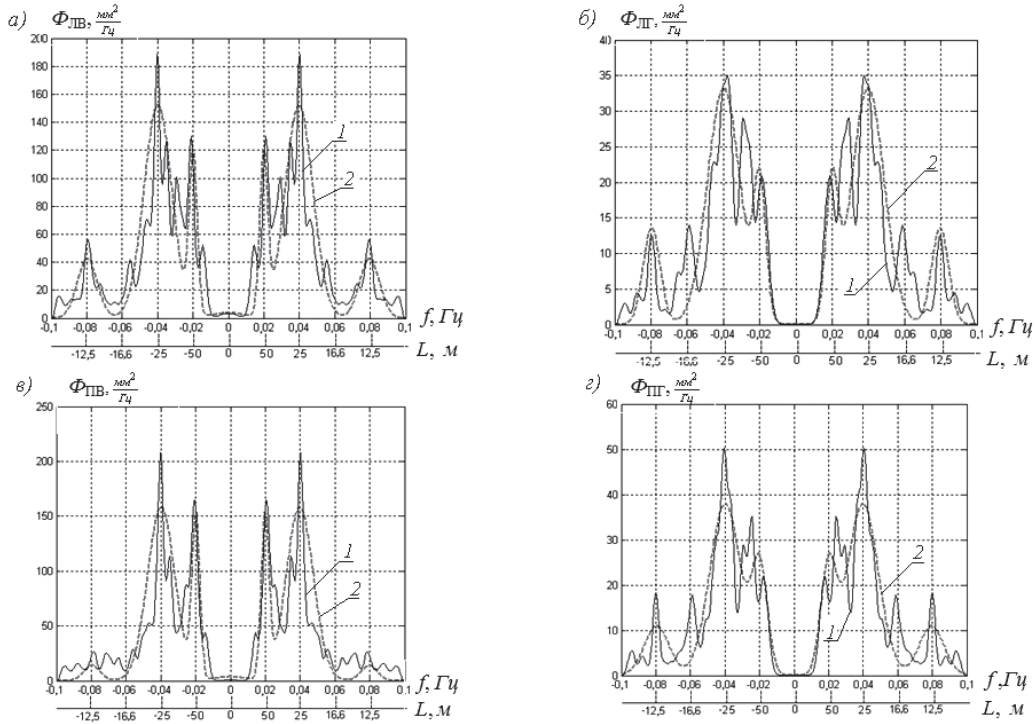


Рис. 5. Спектральные плотности неровностей левого рельса: вертикальных (а) и горизонтальных (б); правого рельса: вертикальных (в) и горизонтальных (г); 1 – экспериментальные; 2 – построенные по аналитическому выражению

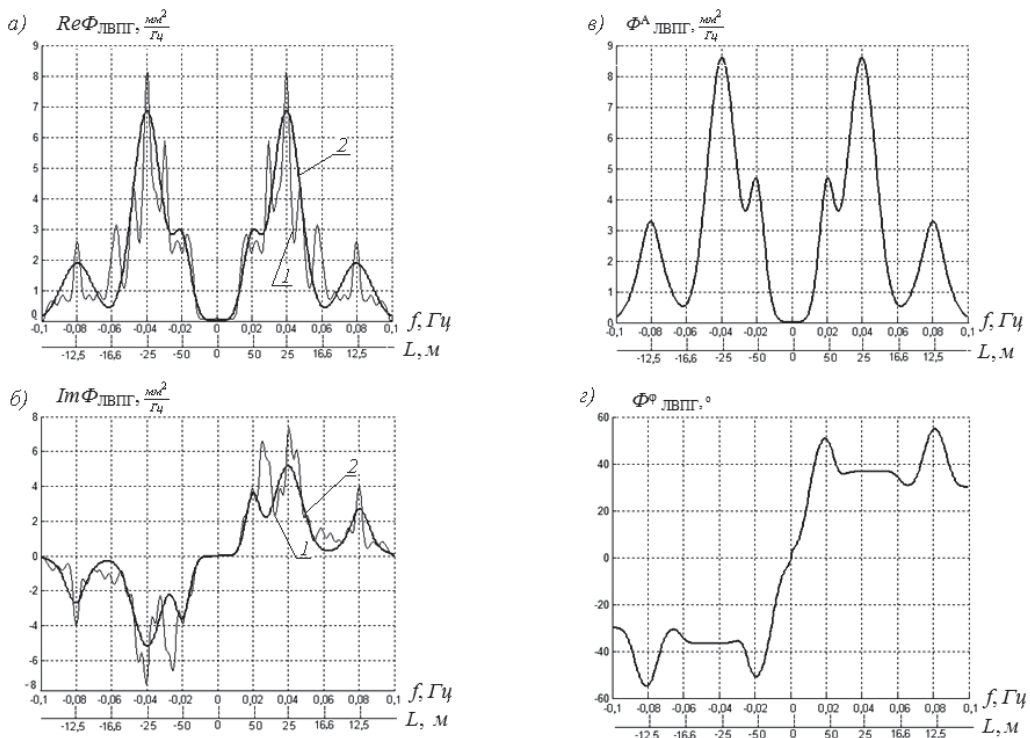


Рис. 6. Составляющие взаимной спектральной плотности между левой вертикальной и правой горизонтальной неровностями рельсов: а – вещественная; б – мнимая; в – амплитудная; г – фазовая; 1 – экспериментальные; 2 – построенные по аналитическим выражениям

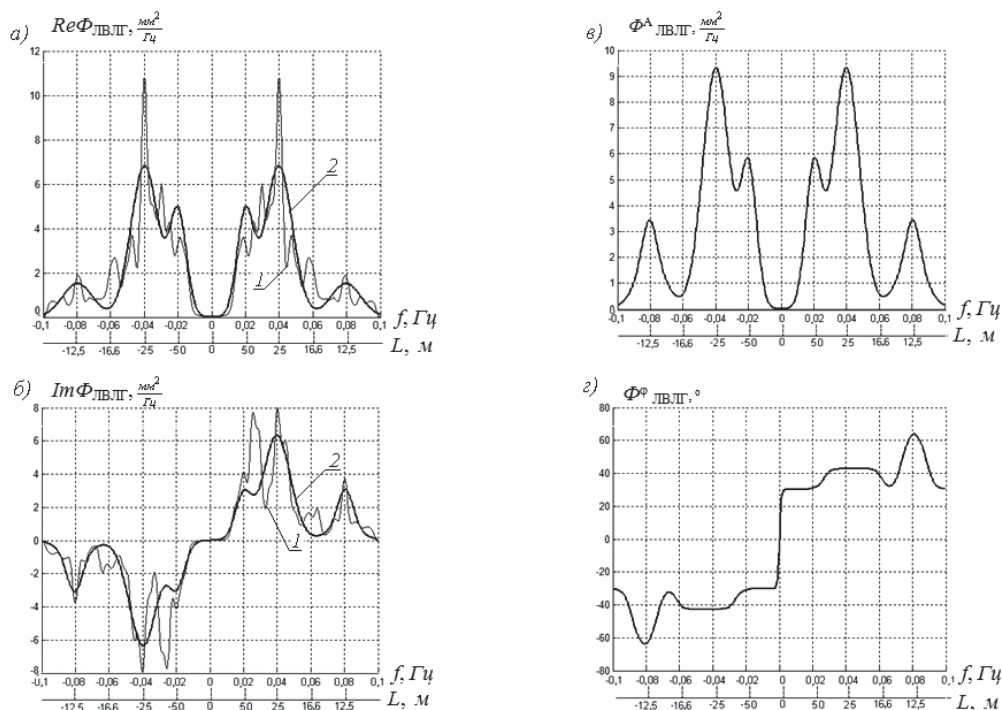


Рис. 7. Составляющие взаимной спектральной плотности между левой вертикальной и левой горизонтальной неровностями рельсов:

а – вещественная; б – мнимая; в – амплитудная; г – фазовая; 1 – экспериментальные; 2 – построенные по аналитическим выражениям

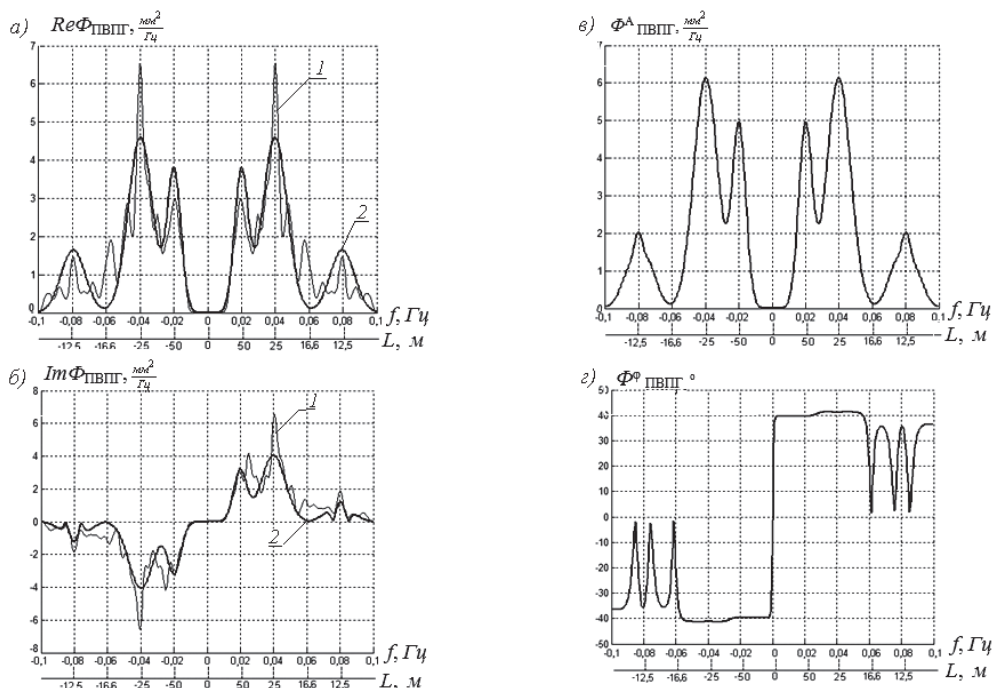


Рис. 8. Составляющие взаимной спектральной плотности между правой вертикальной и правой горизонтальной неровностями рельсов:

а – вещественная; б – мнимая; в – амплитудная; г – фазовая; 1 – экспериментальные; 2 – построенные по аналитическим выражениям

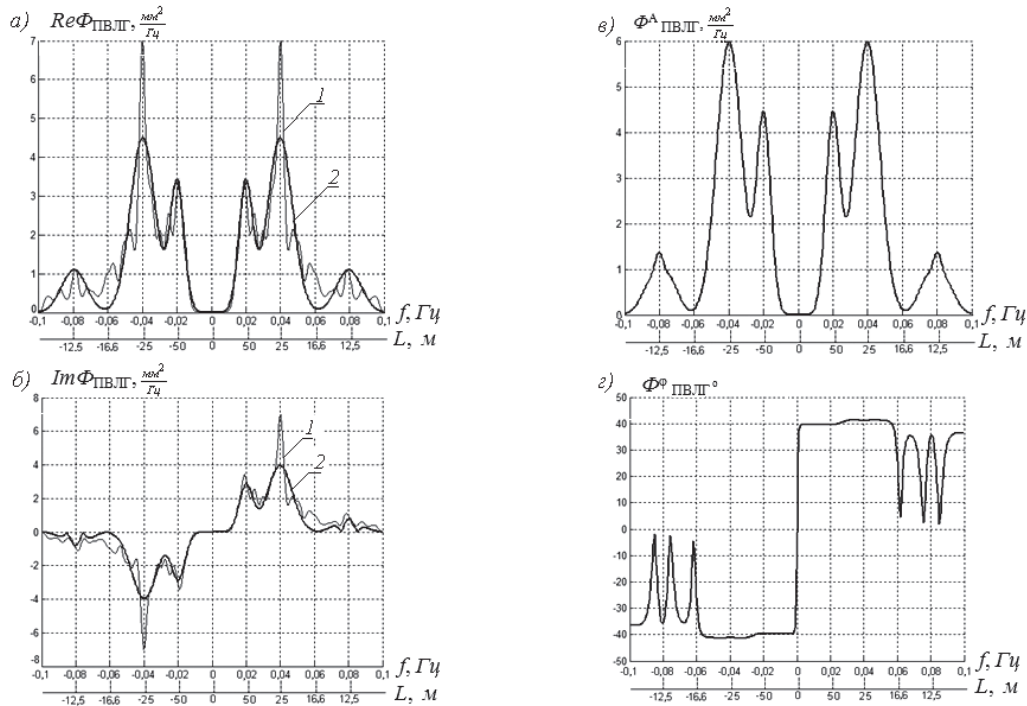


Рис. 9. Составляющие взаимной спектральной плотности между правой вертикальной и левой горизонтальной неровностями рельсов:

a – вещественная; *б* – мнимая; *в* – амплитудная; *г* – фазовая; 1 – экспериментальные; 2 – построенные по аналитическим выражениям

в качестве целевой функции была выбрана сумма квадратов отклонений расчетных значений спектральной плотности и вещественной составляющей взаимной спектральной плотности, полученных по аналитическим выражениям (8) и (13), (14), от соответствующих значений, полученных по экспериментальным данным:

$$\Pi = \sqrt{\sum_k [\Phi_p^2(\omega) - \Phi_s^2(\omega)]}. \quad (15)$$

Минимум выбранной целевой функции находился с помощью алгоритма Нелдера–Мида [5]. Найденные значения параметров аналитических выражений корреляционных функций и спектральных плотностей приведены в табл. 1 и 2.

Графики аналитических выражений корреляционных и взаимных корреляционных функций, а также спектральных и взаимных спектральных плотностей исследуемых про-

цессов, построенные по принятым значениям их параметров, приведены на рис. 2–9 пунктирными линиями. Как видно из этих рисунков, принятые аналитические выражения с выбранными значениями параметров обеспечивают удовлетворительную сходимость с экспериментальными данными. В них явно выделяются четыре слагаемых на принятых значениях частот β_k ; максимумы спектральных плотностей и составляющих взаимных спектральных плотностей расчетных и экспериментальных графиков достаточно близки. Максимумы графиков взаимных корреляционных функций сдвинуты относительно начала координат в точности на величину τ_c .

Графики амплитудных составляющих взаимных спектральных плотностей, построенные по аналитическим выражениям (8), (13) и (14), также имеют четыре максимума на принятых частотах β_k , а графики фазовых составляющих с ростом частоты увеличиваются.

ТАБЛИЦА 1. Параметры аппроксимирующих выражений для спектральных плотностей и корреляционных функций

Наименование параметра		Номер составляющей	$\Phi_{\text{лг}}$	$\Phi_{\text{пг}}$	$\Phi_{\text{лв}}$	$\Phi_{\text{пв}}$
Величина дисперсии	$S_{\eta}^2, \text{мм}^2$	—	6,75	8,28	27,0	26,2
Доля дисперсии	a_k	1	0,000	0,000	0,010	0,010
		2	0,150	0,200	0,150	0,200
		3	0,700	0,650	0,700	0,750
		4	0,150	0,150	0,140	0,040
Нормированный коэффициент затухания	$\alpha_k, \text{м}^{-1}$	1	0,000	0,000	0,040	0,040
		2	0,015	0,020	0,010	0,010
		3	0,040	0,040	0,035	0,035
		4	0,021	0,032	0,025	0,021
Нормированная частота	$\beta_k, \text{м}^{-1}$	1	0,000	0,000	0,000	0,000
		2	0,125	0,125	0,125	0,125
		3	0,250	0,250	0,250	0,250
		4	0,500	0,500	0,500	0,500

ТАБЛИЦА 2. Параметры аппроксимирующих выражений для взаимных спектральных плотностей и корреляционных функций

Наименование параметра		Номер составляющей	$\Phi_{\text{лвлг}}$	$\Phi_{\text{лвпг}}$	$\Phi_{\text{пвлг}}$	$\Phi_{\text{пвпг}}$
Величина дисперсии	$S_{\eta}^2, \text{мм}^2$	—	2,90	2,70	1,8	1,76
Доля дисперсии	a_k	1	0,010	0,010	0,010	0,010
		2	0,250	0,200	0,220	0,240
		3	0,600	0,700	0,600	0,650
		4	0,140	0,090	0,170	0,100
Нормированный коэффициент затухания	$\alpha_k, \text{м}^{-1}$	1	0,040	0,040	0,040	0,040
		2	0,021	0,021	0,019	0,021
		3	0,030	0,035	0,035	0,035
		4	0,028	0,035	0,035	0,030
Нормированная частота	$\beta_k, \text{м}^{-1}$	1	0,000	0,000	0,000	0,000
		2	0,125	0,125	0,125	0,125
		3	0,250	0,250	0,250	0,250
		4	0,500	0,500	0,500	0,500
Время сдвига	$T_c, \text{с}$	—	5,0	4,5	8,0	8,0

Заключение

Таким образом, в работе представлен полный набор характеристик, определяющих особенности многомерных случайных процессов возмущений, вызывающих колебания подвижного состава железных дорог, в виде вертикальных и горизонтальных неровностей левой и правой рельсовых нитей. В состав этих характеристик вошли корреляционные и взаимные корреляционные функции, а также спектральные и взаимные спектральные плотности.

Аппроксимация этих характеристик аналитическими выражениями позволяет в дальнейшем выполнять решение задач динамики подвижного состава с линеаризованными характеристиками рессорного подвешивания в частотной области. Кроме того, используя эти аналитические выражения, можно выполнять генерацию многомерного случайного процесса возмущения во временной области для численного решения задач динамики подвижного состава с нелинейными характеристиками рессорного подвешивания.

Выводы:

1. Используя полученные статические характеристики многомерного случайного процесса, описывающего геометрические неровности рельсовых нитей, можно более точно проводить исследования колебаний рельсовых экипажей и выбор параметров рессорного подвешивания, генерируя совокупности возмущений, а также решать обобщенные задачи анализа динамики рельсовых экипажей в частотной области.

2. Корреляционные и взаимные корреляционные функции, а также спектральные и взаимные спектральные плотности геометрических неровностей рельсовых нитей содержат несколько составляющих.

3. Аналитическая аппроксимация экспериментальных графиков корреляционных функций и спектральных плотностей выбранными аналитическими выражениями обеспечивает удовлетворительную сходимость.

Библиографический список

1. **Спектральный** состав очертаний рельсовых нитей / З. Л. Крейнис // Вестник ВНИИЖТ. – 1982. – № 4. – С. 48–51.
2. **Некоторые** результаты исследований вертикальных траекторий колеса / А. Н. Савоськин, Л. В. Гойхман, Д. А. Харин // Труды МИИТ. – 1968. – Вып. 296. – С. 143–157.
3. **Вертикальные** и горизонтальные возмущения на рельсовом полотне / А. Н. Савоськин, В. В. Кочергин, А. И. Поляков // Мир транспорта. – 2005. – № 4. – С. 4–14.
4. **Еще раз** об измерении вертикальных неровностей пути / Ю. С. Ромен, Н. Н. Кудрявцев, В. Н. Белоусов // Вестник ВНИИЖТ. – 1990. – № 1. – С. 29–31.
5. **Himmelblau**, D. M. (1972). Applied Nonlinear Programming, McGraw-Hill, 416 p.
6. **Garg**, V. K., Dukkipati, R. V. (1984). Dynamics of Railway Vehicle Systems, Toronto, 407 p.
7. **Jenkins**, G. M., Watts, D. G. (1968). Spectral Analysis and Its Applications, San Francisco, 525 p.
8. **Выбор** оптимальных параметров в задачах со многими критериями : учеб. пособие для вузов. – 2-е изд., перераб. и доп. / И. М. Соболев, Р. Б. Статников. – Москва : Дрофа, 2006. – 175 с., ил.
9. **Bendat**, J. S., Piersol, A. G. (1971). Random Data: Analysis and Measurement Procedures, New York, 407 p.
10. **Прикладные** методы теории случайных функций / А. А. Свешников. – Москва : Наука, 1968. – 463 с.