УДК 629.4.027.2

А. В. Белянкин, С. В. Дмитриев, Д. Е. Кумпяк
ЗАО «Испытательный центр технических средств железнодорожного транспорта»

В. П. Богданов

МЕТОД ОРТОГОНАЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ НА ВЕКТОРНОЕ ПРОСТРАНСТВО БАЗИСНЫХ ОТКЛИКОВ ДАТЧИКОВ ДЛЯ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА ВАГОННЫЕ КОНСТРУКЦИИ

В общем виде изложен метод косвенной регистрации совокупности силовых факторов, действующих на деформируемые конструкции в зоне линейной упругости. Дано подробное теоретическое обоснование метода: его математические аспекты и физическая интерпретация. Сформулировано математическое условие физически адекватного выбора совокупности силовых факторов, действующих на конструкцию. Приведены априорные оценки, показывающие, как погрешность входных данных влияет на точность оценок значений силовых факторов.

ходовые динамические испытания, регистрация значений сил.

Введение

Выявленное в последнее время значительное число случаев изломов боковых рам тележек грузовых вагонов актуализировало вопрос об эффективных и достаточно точных для инженерной практики способах экспериментальной регистрации силовых факторов, действующих на вагонные конструкции, в частности, на боковую раму тележки. Традиционно используемые в практике ходовых динамических испытаний тензорезисторные схемы [1, с. 92] хорошо зарекомендовали себя в случаях, когда на исследуемый узел действует только один силовой фактор. Использование нескольких схем для регистрации нескольких силовых факторов, действующих на одну и ту же упругую конструкцию, невозможно из-за того, что каждая схема будет реагировать на каждый вид нагрузки, т. е. действия нагрузок нельзя будет отделить друг от друга.

1 Описание и обоснование метода

Метод измерения нагрузок, рассматриваемый в настоящей работе, не предполагает объединения тензометрических датчиков в схемы. Каждый из датчиков реагирует на каждый вид нагрузки, а расчетная интерпретация показаний всех датчиков позволяет узнать, какая именно нагрузка и в каком количестве была приложена. Эта расчетная интерпретация предполагает линейно-упругий характер реакции конструкции на интересующие силовые факторы (закон Гука и принцип суперпозиции) и, если отвлечься от конкретных особенностей какой-либо вагонной конструкции, описывается в рамках следующего математического формализма.

Допустим, нас интересуют N силовых факторов, нагружающих конструкцию (значения j-го силового фактора обозначаются далее через F_j). Для их регистрации на конструкции размещены K тензодатчиков (отклики i-го датчика обозначаются далее через S_i). Отметим, что на практике K значительно больше, чем N, что и будет предполагаться далее в тексте. Линейный характер зависимости откликов датчиков от нагрузок математически выражается в виде:

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ \vdots \\ S_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1N} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{K1} & \cdots & g_{KN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_N \end{bmatrix}$$

или в краткой записи:

$$S = \hat{G} \cdot F, \tag{1}$$

где

$$S = \begin{bmatrix} S_1 \\ \vdots \\ S_K \end{bmatrix}; \quad F = \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_N \end{bmatrix};$$

$$\hat{G} = \begin{bmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1N} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{K1} & \cdots & g_{KN} \end{bmatrix}.$$

Коэффициенты g_{ij} *матрицы влияния* $\hat{G}$ оцениваются по результатам тарировочных замеров. Физический смысл *коэффициентов влияния* g_{ij} есть отклик i-го датчика на единичную нагрузку от j до силового фактора, что математически выражается в виде очевидного тождества:

$$G_j = \hat{G} \cdot \Phi_j, \tag{2}$$

в котором G_j – j-й столбец матрицы влияния; Φ_j – столбец из N элементов, все элементы которого равны нулю, кроме j-го, равного единице:

$$G_j = \begin{bmatrix} g_{1j} \\ \vdots \\ g_{Kj} \end{bmatrix};$$

$$\Phi_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \text{(единица на } j\text{-м месте).} \tag{3}$$

Физически адекватный выбор совокупности силовых факторов проявляется в максимальности ранга матрицы влияния $\hat{G}$:

$$\operatorname{rank}\left(\hat{G}\right) = N, \tag{4}$$

т. е. линейной независимости ее столбцов. Чтобы доказать это предположение, рассудим следующим образом. Предположим противное: пусть среди столбцов матрицы $\hat{G}$ есть хотя бы один, являющийся линейной комбинацией остальных:

$$G_l = \sum_{j \neq l} \alpha_j \cdot G_j,$$

где α_j – какие-то числа.

Тогда, в силу (2):

$$G_l = \sum_{j \neq l} \alpha_j \cdot G_j = \sum_{j \neq l} \alpha_j \cdot \hat{G} \cdot \Phi_j = $$
$$= \hat{G} \cdot \left(\sum_{j \neq l} \alpha_j \cdot \Phi_j \right).$$

Равенство $G_l = \hat{G} \cdot \left(\sum_{j \neq l} \alpha_j \cdot \Phi_j \right)$ физически означает следующее: была приложена комбинированная нагрузка, вклад в которую внесли все силовые факторы, *кроме* l-го, однако отклик датчиков был таким, как будто была приложена единичная нагрузка *только* l-го силового фактора. Далее видно, что условие (4) выполнено.

Формула (1) позволяет вычислять отклики датчиков по известным нагрузкам. Для практики ходовых динамических испытаний важно решение обратной задачи – восстановления приложенных нагрузок по известным откликам датчиков. При этом необходимо учитывать, что, помимо полезного сигнала, несущего информацию об интересующих нас нагрузках (именно эти нагрузки и прикладывались к конструкции во время тарировочных замеров), от датчиков будет идти, условно говоря, *паразитный* сигнал, обусловленный как силовыми факторами, которыми конструкция не нагружалась при тарировках, так и погрешностями измерительной аппаратуры. В связи с этим целесообразно ввести следующую терминологию.

Результирующую нагрузку, возникающую при одновременном приложении нескольких (или всех) силовых факторов, участвовавших в тарировочных замерах, назовем *приводящейся к тарированным*; сюда же следует отнести нагрузку, которая становится таковой после пересчета сил на другие точки их приложения. Если величины одновременно приложенных силовых факторов $F_1, \ldots, F_N$, то, согласно принципу суперпозиции, отклик каждого датчика есть сумма откликов на каждый силовой фактор:

$$S = F_1 \cdot G_1 + \ldots + F_N \cdot G_N = \hat{G} \cdot \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_N \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Напомним, что через G_j нами обозначен столбец из величин откликов на единичную нагрузку j-го силового фактора, см. (3). Линейно-независимые вектор-столбцы $G_1, \ldots, G_N$ будем называть *базисными откликами (датчиков)*. Множество всех K-мерных вектор-столбцов S, представимых в виде (5), обозначим через S^N. Это множество есть N-мерное векторное подпространство в K-мерном векторном пространстве S^K всевозможных K-мерных вектор-столбцов. Вектор-столбцы $G_1, \ldots, G_N$ образуют базис S^N. На пространстве S^K рассмотрим стандартное евклидово скалярное произведение:

$$R, S = R_1 \cdot S_1 + \ldots + R_K \cdot S_K = R' \cdot S = S' \cdot R,$$

где R и S – два произвольных вектор-столбца пространства S^K, штрихом (здесь и далее по тексту) обозначается операция транспонирования матрицы.

Обозначим через $S_{\perp}^{K-N}$ ортогональное дополнение пространства S^N до пространства S^K, т. е. множество вектор-столбцов $R \in S^K$ ортогональных всем векторам $S \in S^N$:

$$S_{\perp}^{K-N} = \left\{ R \in S^K \,|\, \forall S \in S^N \quad R, S = 0 \right\}.$$

Согласно одной из общих теорем линейной алгебры [3, с. 117] пространство S^K является прямой суммой пространств S^N и $S_{\perp}^{K-N}$ (обычно это записывают в виде $S^K = S^N \oplus S_{\perp}^{K-N}$. Последнее буквально означает, что каждый вектор-столбец $S \in S^K$ однозначно представим в виде суммы своих ортогональных проекций $S_{\parallel} \in S^N$ и $S_{\perp} \in S_{\perp}^{K-N}$ на эти подпространства:

$$S = S_{\parallel} + S_{\perp} = F_1 \cdot G_1 + \ldots + F_N \cdot G_N + S_{\perp}. \quad (6)$$

Рассмотрим отклик S на произвольную нагрузку. Возможны два взаимоисключающих случая:

а) Отклик S имеет вид (5), т. е. $S = S_{\parallel}$, а $S_{\perp} = 0$. Это значит, что была приложена только нагрузка, приводящаяся к тарированным.

б) У отклика есть ненулевая ортогональная к S^N составляющая $S = S_{\parallel} + S_{\perp}$, $S_{\perp} \neq 0$, которую мы назовем *паразитным* откликом, в отличие от *полезного* отклика $S_{\parallel}$. Полезный сигнал обусловлен нагрузкой, приводящейся к тарированной нагрузке. Паразитный сигнал обусловлен некой не приводящейся к тарированным *дополнительной* нагрузкой и погрешностями измерительного комплекса.

Наша задача – выделить полезный сигнал из зафиксированного приборами, т. е. найти коэффициенты F_j в разложении (6).

Коэффициенты разложения $F_1, \ldots, F_N$ проекции находим стандартными методами линейной алгебры: домножим скалярно равенство (6) на вектор-столбец G_i. С учетом того, что $G_i, S_\perp = 0$, получим:

$$G_i, S = G_i, G_1 \cdot F_1 + \ldots + G_i, G_N \cdot F_N.$$

Мы имеем N таких равенств ($i \in \{1, \ldots, N\}$), которые удобно записать в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} G_1, G_1 & \ldots & G_1, G_N \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ G_N, G_1 & \ldots & G_N, G_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1, S \\ \vdots \\ G_N, S \end{bmatrix},$$

откуда

$$F = \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_N \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} G_1, G_1 & \ldots & G_1, G_N \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ G_N, G_1 & \ldots & G_N, G_N \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} G_1, S \\ \vdots \\ G_N, S \end{bmatrix}, \quad (7)$$

где верхний индекс ($^{-1}$) обозначает обращение матрицы.

Невырожденность матрицы $\Gamma = [G_i, G_j]$, т. е. существование матрицы Γ^{-1}, гарантируется условием (4).

Поскольку $G_i, G_j = G_i' \cdot G_j$ и G_i' есть i-я строка матрицы $\hat{G}'$,

$$\begin{bmatrix} G_1, G_1 & \ldots & G_1, G_N \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ G_N, G_1 & \ldots & G_N, G_N \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} G_1' \cdot G_1 & \ldots & G_1' \cdot G_N \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ G_N' \cdot G_1 & \ldots & G_N' \cdot G_N \end{bmatrix} = \hat{G}' \cdot \hat{G};$$

$$\begin{bmatrix} G_1, S \\ \vdots \\ G_N, S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1' \cdot S \\ \vdots \\ G_N' \cdot S \end{bmatrix} = \hat{G}' \cdot S$$

и (7) можно представить в виде:

$$F = \left(\hat{G}' \cdot \hat{G}\right)^{-1} \cdot \hat{G}' \cdot S. \quad (8)$$

Поскольку $\hat{G}$ – матрица полного ранга, произведение $\left(\hat{G}' \cdot \hat{G}\right)^{-1} \cdot \hat{G}'$ совпадает с так называемой псевдообратной матрицей Мура–Пенроуза [4, с. 61], традиционно обозначаемой через $\hat{G}^+$:

$$\left(\hat{G}' \cdot \hat{G}\right)^{-1} \cdot \hat{G}' = \hat{G}^+$$

и формула (8) редуцируется до

$$F = \hat{G}^+ \cdot S. \quad (9)$$

Описанная методика выделения полезного сигнала в формулировке (9) ранее предлагалась в докладе [2]. Наш подход к этому вопросу содержит физическую интерпретацию математической операции (8) и показывает, что описанный метод выделения полезного сигнала является точным в рамках принятой математической модели.

Следует также отметить, что одно из важнейших свойств псевдообратных матриц [5, с. 234] заключается в том, что вектор-столбец $\hat{G}^+ \cdot S$ является решением системы уравнений (1), в которой неизвестным считается столбец F, в смысле наименьших квадратов. Это означает, что невязка $\left\|\hat{G} \cdot F - S\right\|$ при $F = \hat{G}^+ \cdot S$ принимает наименьшее значение:

$$\left\|\hat{G} \cdot \left(\hat{G}^+ \cdot S\right) - S\right\| = \min_{F \in R^N} \left\|\hat{G} \cdot F - S\right\|,$$

где $\|S\| = \sqrt{S_1^2 + \ldots + S_K^2}$.

Таким образом, ортогональная проекция $S_\parallel$ отклика S, а S^N является ближайшим (в смысле евклидова расстояния) к S откликом, лежащим в подпространстве S^N. Другими словами, выделяя из отклика S-го часть $S_\parallel$, соответствующую нагрузке, приводящейся к тарированным, мы исходим из минимума расстояния $\left\|S - S_\parallel\right\|$ между откликами. Последняя величина есть также евклидова длина $\|S_\perp\|$ отклика датчиков $S_\perp$ на паразитную нагрузку. Поэтому выбор в качестве $S_\parallel$ ортогональной проекции S, а S^N можно назвать *принципом минимальной паразитной нагрузки*.

2 Оценка погрешности метода

Как было отмечено выше, изложенный метод восстановления нагрузок, приводящихся к тарированным, следует считать точным в рамках принятой математической модели. Возможная погрешность δF при восстановлении значений силовых факторов F может быть обусловлена лишь погрешностью δS входного сигнала S, вызванной ограниченной точностью измерительного комплекса. Если вместо точного значения S входного сигнала нам известно его искаженное значение $S + \delta S$, то выходной сигнал тоже будет искажен – вместо точного значения F мы восстановим некоторое $F + \delta F$. Кроме того, вместо точного значения $\hat{G}$ матрицы влияния нам известно ее несколько искаженное значение $\hat{G} + \delta\hat{G}$. Таким образом, при восстановлении силовых факторов вместо решения F уравнения (1) мы получим решение $F + \delta F$ уравнения:

$$\left(\hat{G} + \delta\hat{G}\right)\cdot\left(F + \delta F\right) = S + \delta S. \qquad (10)$$

Получим оценку погрешности δF решения через погрешности $\delta\hat{G}$ и δS входных данных. Для этого определим *число обусловленности* $\chi(A)$ матрицы A по отношению к норме $\|\cdot\|$ как

$$\chi(A) = \left\|A^{+}\right\|\cdot\left\|A\right\|,$$

где $\|\cdot\|$ – норма на пространстве всех $K\times N$-матриц. В литературе по вычислительным аспектам линейной алгебры число обусловленности определяется только для невырожденных квадратных матриц как $\chi(A) = \left\|A^{-1}\right\|\cdot\left\|A\right\|$ [6, с. 404]. Наше определение числа обусловленности является очевидным и естественным обобщением.

Далее будем предполагать, что нормы на пространствах матриц и вектор-столбцов *согласованы* [6, с. 355]. Это значит, что для любой $K\times N$-матрицы и любого столбца v из N элементов выполняется неравенство:

$$\left\|A\cdot v\right\| \le \left\|A\right\|\cdot\left\|v\right\|.$$

Примеры согласованных норм [6]:

$$\left\|v\right\|_1 = \sum_{i=1}^{N}\left|v_i\right|, \quad \left\|A\right\|_1 = \max_{1\le j\le N}\left(\sum_{i=1}^{K}\left|A_{ij}\right|\right).$$

$$v_\infty = \max\left\{\left|v_1\right|,\ldots,\left|v_N\right|\right\},\ A_\infty = \max_{1\le i\le K}\left(\sum_{j=1}^{N}\left|A_{ij}\right|\right).$$

В приводимых далее выкладках будет использовано то, что для матрицы A, имеющей полный ранг по столбцам, выполняется равенство:

$$A^{+}\cdot A = I,$$

где I – единичная матрица, что легко вытекает из соотношения $A^{+} = (A'\cdot A)^{-1}\cdot A'$.

В самом деле, $A^{+}\cdot A = (A'\cdot A)^{-1}\cdot\left(A'\cdot A\right) = I$.

Раскрыв скобки и учитывая, что $\hat{G}\cdot F = S$, перепишем (10) в виде:

$$\left(\hat{G} + \delta\hat{G}\right)\cdot\delta F = \delta S - \delta\hat{G}\cdot F$$

или, после домножения слева на $\left(\hat{G} + \delta\hat{G}\right)^{+}$, в виде:

$$\delta F = \left(\hat{G} + \text{ä}\hat{G}\right)^{+}\cdot\left(\delta S - \text{ä}\hat{G}\cdot F\right).$$

Используя согласованность норм и неравенство треугольника, оценим сверху $\left\|\delta F\right\|$:

$$\left\|\delta F\right\| \le \left\|\left(\hat{G} + \delta\hat{G}\right)^{+}\right\|\cdot\left\|\delta S - \delta\hat{G}\cdot F\right\| \le$$

$$\le \left\|\left(\hat{G} + \delta\hat{G}\right)^{+}\right\|\cdot\left(\left\|\delta S\right\| + \left\|\delta\hat{G}\right\|\cdot\left\|F\right\|\right) =$$

$$= \frac{\chi\left(\hat{G} + \delta\hat{G}\right)}{\left\|\left(\hat{G} + \delta\hat{G}\right)\right\|}\cdot\left(\frac{\left\|\hat{G}\cdot F\right\|}{\left\|S\right\|}\cdot\left\|\delta S\right\| + \left\|\delta\hat{G}\right\|\cdot\left\|F\right\|\right) \le$$

$$\le \frac{\chi\left(\hat{G} + \delta\hat{G}\right)}{\left\|\left(\hat{G} + \delta\hat{G}\right)\right\|}\cdot\left(\frac{\left\|\hat{G}\right\|\cdot\left\|F\right\|}{\left\|S\right\|}\cdot\left\|\delta S\right\| + \left\|\delta\hat{G}\right\|\cdot\left\|F\right\|\right) =$$

$$= \chi\left(\hat{G}+\delta\hat{G}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{\left\|\hat{G}\right\|}{\left\|\left(\hat{G}+\delta\hat{G}\right)\right\|}\cdot\frac{\|\delta S\|}{\|S\|}+\frac{\left\|\delta\hat{G}\right\|}{\left\|\left(\hat{G}+\delta\hat{G}\right)\right\|}\right)\cdot\|F\|,$$

откуда, разделив последнее неравенство на $\|F\|$, получим:

$$\frac{\|\delta F\|}{\|F\|}\le\chi\left(\hat{G}+\delta\hat{G}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{\left\|\hat{G}\right\|}{\left\|\left(\hat{G}+\delta\hat{G}\right)\right\|}\cdot\frac{\|\delta S\|}{\|S\|}+\frac{\left\|\delta\hat{G}\right\|}{\left\|\left(\hat{G}+\delta\hat{G}\right)\right\|}\right).\quad(11)$$

Величина в скобке в правой части (11) имеет порядок относительной погрешности входных данных, левая часть – относительную погрешность решения. Следовательно, число обусловленности $\chi(\hat{G}+\delta\hat{G})$ определяет, насколько погрешность входных данных может повлиять на погрешность решения.

Если тарировочные замеры проведены настолько аккуратно, что погрешностями тарировочных измерений можно пренебречь по сравнению с погрешностями δS откликов датчиков, полученных в результате ходовых динамических испытаний, то можно условно считать, что коэффициенты влияния известны точно, и относительную погрешность решения оценивать с помощью неравенства, получающегося из (11) при $\delta\hat{G}=0$:

$$\frac{\|\delta F\|}{\|F\|}\le\chi\left(\hat{G}\right)\cdot\frac{\|\delta S\|}{\|S\|}.$$

Величину $\chi(\hat{G})$ можно использовать как одну из оценок качества схемы расстановки тензодатчиков при поиске оптимальной схемы расстановки на компьютерной МКЭ-модели упругой конструкции: чем меньше $\chi(\hat{G})$, тем выше качество схемы расстановки.

Заключение

В настоящей статье были изложены математические аспекты обоснования экспериментального определения силовых факторов методом ортогонального проектирования на векторное пространство базисных откликов датчиков. Однако в данной статье не были рассмотрены вопросы выбора количества датчиков и мест их расположения на исследуемой конструкции, которые во многом зависят от ее особенностей. Поскольку эти вопросы могут оказать существенное влияние на качество экспериментальных исследований, они будут изложены авторами в последующих публикациях применительно к конкретным конструктивным элементам.

Библиографический список

1. **РД 24.050.37–95.** Вагоны грузовые и пассажирские. Методы испытаний на прочность и ходовые качества. – Москва : ГосНИИВ, 1995. – 104 с.

2. **Экспериментальное** определение сил взаимодействия рамы тележки и буксы транспортного средства при его движении по рельсовому пути / И. И. Вучетич, Б. А. Деркач, П. В. Поршнев, К. Н. Ляпшин // VII Международная научно-техническая конференция «Подвижной состав XXI века : идеи, требования, проекты». Тезисы докладов. – Санкт-Петербург : ПГУПС, 2011. – С. 21–22.

3. **Курс** линейной алгебры и многомерной геометрии / Р. А. Шарипов. – Уфа : БашГУ, 1996. – 148 с.

4. **Матричное** дифференциальное исчисление с приложениями к статистике и эконометрике / Я. Р. Магнус, Х. М. Нейдекер. – Москва : Физматлит, 2002. – 496 с.

5. **Машинные** методы математических вычислений / Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. М. Моулер. – Москва : Мир, 1980. – 280 с.

6. **Матричный** анализ / Р. Хорн, Ч. Джонсон. – Москва : Мир, 1989. – 656 с.